

Polynom

Definice

Funkce: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme polynome, jestliže (má) tvar $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ pro nějaká reálná čísla $a_0, \dots, a_n$ a $n \in \mathbb{N}$.

Pr.: $f(x) = 5$ $a_0 = 5$ $n = 0$
 $g(x) = x^3 - 7x + 8$ $a_0 = 8$ $n = 3$
 $a_1 = -7$
 $a_2 = 0$
 $a_3 = 1$

$f(x) = a_0 + \dots + a_nx^n$ zapisujeme $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ $x^0 = 1$

Rovnost polynomů

$f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$

Hornerovo schéma

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \quad \dots \quad P(c)$$

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
	$b_{n-1} \cdot c$	$b_{n-2} \cdot c$			
b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_1	b_0

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + b_n \cdot c$$

$$b_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-1} \cdot c$$

Stupeň polynomu

Definice

Nechť P je polynom tvaru $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Říkáme, že stupeň polynomu P je k a značíme $\text{st}(P) = k$ právě když $k = \max \{ i : a_i \neq 0 \}$ pro polynomy, které jsou různé od 0. $\text{st}(0) = -1$

Věta

Nechť P, Q jsou polynomy, Q je nenulový pak existují polynomy R, S tak, že

$$P = Q \cdot R + S \text{ a } \text{st}(S) < \text{st}(Q)$$

R, S jsou určeny jednoznačně

Věta (základní věta algebry)

Každý polynom n -tého ^(algebraického) stupně má alespoň jeden komplexní kořen.

Lineární lomené fce

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{polynom} + \text{elementární zlomky}$$

Rozklad racionální lomené fce na parciální zlomky

Def. dom. rae. lom. fce: $\mathbb{C} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$

Def.: Elementární zlomek je funkce daná vztahem $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$, kde $a \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$

Příklad:

$$\frac{2x^3 - 9x^2 - 13x - 16}{x^2 - 4x + 3} = 2x - 1 + \frac{3x - 13}{(x-1)(x-3)} = 2x - 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} =$$

$$= 2x - 1 + \frac{5}{x-1} - \frac{2}{x-3}$$

$$(2x^3 - 9x^2 + 13x - 16) : (x^2 - 4x + 3) = 2x - 1$$

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 9x^2 + 13x - 16) \\ - (2x^3 - 8x^2 + 6x) \\ \hline -x^2 + 7x - 16 \\ - (-x^2 + 4x - 3) \\ \hline 3x - 19 \end{array}$$

$$3x - 13 = A(x-3) + B(x-1)$$

$$3x - 13 = Ax - 3A + Bx - B$$

$$x^1: 3 = A + B$$

$$x^0: -13 = -3A - B$$

$$-10 = -2A$$

$$A = 5$$

$$B = -2$$

Věta: Necht' P, Q jsou polynomy, $\text{st } P < \text{st } Q$. Pokud α je kořen Q násobnosti k , pak existuje číslo a a polynom P_1 tak, že $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{a}{(x-\alpha)^k}$, kde $Q(x) = (x-\alpha) \cdot Q_1(x)$, $\text{st } P_1 < \text{st } Q_1$.

Důsledek: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{(x-\alpha)^k} + \frac{b}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots$

Věta: Necht' P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty, $\text{st } P < \text{st } Q$. Pokud α je imaginární kořen polynomu Q násobnosti k , pak existují reálná čísla b, c a polynom P_1 s reálnými koeficienty tak, že $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}$, kde $Q(x) = (x^2+px+q) \cdot Q_1(x)$, $x^2+px+q = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$, $\text{st } P_1 < \text{st } Q_1$.

$$\text{př. } \frac{2x^6 + 15x^5 + 3x^4 + 40x^3 - 10x^2 + 29x + 1}{(x+3)(x-1)^2 \cdot (x^2+1)^2} =$$

$$\text{d } Q = 7$$

$$\text{d } P = 6$$

$$= \cancel{\frac{A}{x-1}} + \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+3)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} 2x^6 + 15x^5 + 3x^4 + 40x^3 - 10x^2 + 29x + 1 &= A(x-1)(x+3)(x^2+1)^2 + B(x+3)(x^2+1)^2 + C(x-1)^2(x^2+1)^2 + \\ &+ (Dx+E)(x-1)^2(x+3)(x^2+1) + (Fx+G)(x-1)^2(x+3) \\ &= A(x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3) + \\ &+ B(x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 6x^2 + x + 3) + \\ &+ C(x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1) + \\ &+ (Dx+E)(x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 3) + \\ &+ (Fx+G)(x^3 + x^2 - 5x + 3) \end{aligned}$$

$$x^6: 2 = A + C + D$$

$$x^5: 15 = 2A + B - 2C + D + E$$

$$x^4: 3 = -A + 3B + 3C - 4D + E + F$$

$$x^3: 40 = 4A + 2B - 4C + 4D - 4E + F + G$$

$$x^2: -10 = -5A + 6B \dots$$

⋮

soustava 7 rovnic,
7 neznámých

$$A=3, B=5, C=-2, D=1, E=-1, F=2, G=0$$

Počítání s maticemi

matice 2D tabulka (konečná) čísel nebo jiných matem. objektů

Ústavy lin. rovnice

bre - násobení ~~ne~~ regulovan konst
přičtení jedné rovnice k jiné rovnici
prohození rovnice mezi sebou

$$2x + 5y = -1$$

$$4x - 3y = 11$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -13 & 13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Matice

Def: Matice s m řádky a n sloupci nazýváme typu (m, n)

Poznámka: Není-li uvedeno jinak, pak prvky matice předpokládáme reálná čísla

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nulová matice $A = (a_{ij})$; $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$

Rovnost matice ...

Číslicí matice ...

Násobení matice konstantou

Násobení matice mezi sebou

A typu (m, n) , B typu (n, p)

$$m \left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)}_n \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)}_p \right\}_m = \underbrace{\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)}_p \bigg\}_m$$

Věta: Násobení matice je asociativní a je distributivní vzhledem ke sčítání matice, pokud jsou typy matice takové, že příslušné násobení je definováno.

Důkaz

Čtvercové matice

$$E \cdot A = A \cdot E = A$$

↑ jednotková matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = E = A \cdot A^{-1}$$

↑ inverzní matice, může, ale nemusí existovat

Def: E je jednotková matice, pokud E je čtvercová a $\text{form} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$
 Platí $E \cdot A = A \cdot E = A$

Def: Necht A je typu (n, n) , tj. čtvercová. Pokud existuje mat B typu (n, n) taková, že $A \cdot B = B \cdot A = E$, pak B nazýváme inverzní maticí k matici A . Značíme $B = A^{-1}$

Věta: Pokud existuje inverzní matice k matici A , pak je jediná.

Důk: Necht B je inverzní k A , C je inverzní k A

$$A \cdot B = B \cdot A = E, \quad A \cdot C = C \cdot A = E$$

$$\underline{B} = B \cdot E = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = \underline{C}$$

Def: Čtvercovou matici nazýváme regulární, pokud existuje inverzní matice k této matici.

Čtvere. mat. max. singulární, pokud k ní neexistuje inverzní matice.

Metoda na hledání inverzních matic

$$(A|E) \sim (E|B) \quad B = A^{-1}$$

Lemma: Součin regulárních matic je regulární matice.

A je regul : ex A^{-1}

B je regul : ex B^{-1}

... ex $(A \cdot B)^{-1}$?

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B) = E$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (\underbrace{A^{-1} \cdot A}_E) \cdot B = B^{-1} \cdot (E \cdot B) = B^{-1} \cdot B = E$$

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = E$$

obdobně

Determinant : jen pro čtvercové matice.

Def : Nechť A je typu (n, n) . Determinant matice A (značíme $\det A$) je číslo, které počítáme podle vzorce

$$\sum_{\pi=(j_1, j_2, \dots, j_n)} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$$

↓
všech permatace

$(1, 2, 3)$	sgn
	+
1 3 2	-
2 1 3	-
2 3 1	+
3 1 2	+
3 2 1	-

all. kol. fakt. c.
dru. op. n. m.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det A = ad - bc$$

Věta : Nechť A je horní ^(trojúhelníková) ∇ , tj. $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. Pak

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Věta : (4.21 jeho text)

- 1) Jestliže prohodíme dva řádky v matici, pak $\det A' = -\det A$
- 2) Má-li matice A dva stejné řádky, pak $\det A = 0$
- 3) Vynásobíme-li jeden řádek matice A a ostatní řádky ponecháme, dostaneme A' ; $\det A' = \alpha \cdot \det A$

$$4) \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a+b \\ \vdots \end{pmatrix}$$

5) Průchodem-li α násobíme j -tého řádku b i -tému,
dostaneme A' , $\det A' = \det A$

přeměna

5.11. od 18⁰⁰

někoho možná přeloží do Dejvic 256
v KOSM v jednorázových abkách

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & +10 & +6 \\ 0 & +6 & +5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{5} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 30 & 25 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

Sarrusovo pravidlo = pro matice 3×3

$$12 + 6 + 12 - 2 - 24 - 18 = -14$$

Křížové pravidlo - matice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Transponovaná matice k matici $A(a_{ij})$ je matice $A^T(a_{ji})$

Tvrzení $\det A^T = \det A$

(dohazáno lemma)

→ lze i sloupcevé úpravy

Věta o rozvoji determinantu podle řádku

Nechť A je matice typu (n, n) , A_{ij} jsou matice vzniklé z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce, tj. typu $(n-1, n-1)$

Platí 1) $\det A = (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1} + (-1)^{n+2} a_{n2} \det A_{n2} + \dots + (-1)^{nm} a_{nm} \det A_{nm}$

2) $0 = (-1)^{n+1} a_{n1} \det A_{n1} + (-1)^{n+2} a_{n2} \det A_{n2} + \dots + (-1)^{nm} a_{nm} \det A_{nm}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 3(-2) = \underline{\underline{-14}}$$

Podobně rozvoj podle sloupce
inteligentní zjednodušení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Věta: Necht A, B jsou matice typu (m, m)

$$\text{Pak } \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Důsledek: Pokud A regulární, pak

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

$$\text{Dk: } A \cdot A^{-1} = E \quad \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Poznámka: Aby existovala inverzní matice, musí $\det A \neq 0$

Věta: Inverzní matice k A existuje právě tehdy, když $\det A \neq 0$

Dk: Necht $\det A \neq 0$.

$\rightarrow$ může být invertována

Tedy, ke matice $\boxed{\frac{1}{\det A} \cdot B^T}$ je inverzní matice

k matici A , kde B je matice doplňků k matici A ,

kde doplnek D_{ij} k matici A je číslo $(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$,

kde A_{ij} je matice, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$B = (D_{ij}) \quad B^T = (D_{ji})$$

$$e_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot D_{kj} =$$

$$= \frac{1}{\det A} (a_{i1} \cdot D_{k1} + a_{i2} \cdot D_{k2} + \dots + a_{in} \cdot D_{kn}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\det A} \cdot \det A = 1 & \text{pro } i=k \\ 0 & \text{pro } i \neq k \end{cases}$$

= prvky E

✓

Lineární prostor

Definice: Lineární prostor je množina L , na které je definováno ^{2 prvky $0, 1 \in L$} sčítání $+: L \times L \rightarrow L$ a násobení reálným číslem $\cdot: \mathbb{R} \times L \rightarrow L$ s těmito vlastnostmi: $\forall x, y, z \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $x + y = y + x$ (komutativní sčít.)

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativní sčít.)

3) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (asoc. $\cdot$)

4) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributivní $\cdot$)

5) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x$ (— " —)

6) $1 \cdot x = x$

7) Existuje $0 \in L$; $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in L$

Def. Prvky lineárního prostoru nazýváme vektory

Def. Nulový vektor $\vec{0}$ vlastnosti (7) definice lin. prostoru

Věta: Nechť $\vec{0}$ je nulový vektor lin. prostoru L , $\vec{x} \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí:

1) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

2) $\alpha \vec{0} = \vec{0}$

3) Je-li $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0} \wedge \alpha \neq 0$, pak $\vec{x} = \vec{0}$
↑ pomohl z 1. věty

Důk.: 1) $x + 0 \cdot x \stackrel{(6)}{=} 1 \cdot x + 0 \cdot x \stackrel{(4)}{=} (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x \stackrel{(6)}{=} x$

2) $\alpha \cdot (0 \cdot x) = (\alpha \cdot 0) \cdot x = 0 \cdot x = 0$

3) $\alpha \cdot x = 0 \cdot x \quad | \cdot \frac{1}{\alpha}$

$(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha) \cdot x = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 \cdot x$

$1 \cdot x = 0 \cdot x$

$x = 0$

P4

uspořádk. trojice reáln. čísel tvoří množinu $\mathbb{R}^3$
 (a, b, c) , kde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Definujeme $+$: $(a, b, c) + (d, e, f) = (a+d, b+e, c+f)$
 $\cdot$: $\alpha \cdot (a, b, c) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b, \alpha \cdot c)$ } to je
lin. prostor

(1) $(a, b, c) + (d, e, f) = (d, e, f) + (a, b, c)$

$$(a+d, b+e, c+f) = (d+a, e+b, f+c)$$

podobně
ord. podle definice

stejný - nor-
mální sčítání

P5

$$L = \{ \odot \}$$

$$\odot + \odot = \odot$$

(to je sluníčko :))

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot \odot = \odot$$

P6

polynomy nejvýše n -tého stupně s běžně definovaným
sčít. a nás. konst. tvoří lin. prostor

P7

polynomy právě n -tého stupně nedvoří lin. prostor

$$+ : L \times L \rightarrow L$$

$$(x^3+1) + (-x^3+x) = x+1$$

výsledek není prvek L
také není nulový prvek

P8

Funkce definované na D (def. obor) s běžným $+$, $\cdot$
tvoří lin. prostor

Def: Necht L je lineární prostor, $M \subseteq L$.
Řekáme, že M je lineární podprostor prostoru L ,
pokud $\forall x, y \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$1) x + y \in M$$

$$2) \alpha \cdot x \in M$$

Pr. $\mathcal{P}$ jsou polynomy libovolného stupně (tvorí lin. prostor)
 $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_n$ je lin. podprostor $\mathcal{P}$

Pr. $M = \{(\alpha, \beta, \gamma), \alpha + 3\beta = \gamma\}$, ověřme, že M je lin. podprostor
lin. prostoru $\mathbb{R}^3$

$$(\alpha, \beta, \gamma) + (a, b, c) = (\alpha + a, \beta + b, \gamma + c) \in M$$

$$\alpha + a + 3(\beta + b) = \gamma + c$$

$N = \{(\alpha, \beta, \gamma), \alpha + \beta = 1\}$, N netvorí lin. podprostor
násobení ~~nulou~~ vede k výsledku, který neleží v N

Lineární závislost / nezávislost vektorů

Def: Necht $x_1, x_2, \dots, x_m$ jsou vektory
lineární kombinace vektorů $x_1, x_2, \dots, x_m$ je vektor $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$,
kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jsou nějaká reálná čísla, která nazýváme koefficienty této

Def: Triviální lin. komb. vektorů $x_1, x_2, \dots, x_m$ je lineární
kombinace pouze s nulovými koefficienty $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

Důsledek: Každá triviální LK je rovna nulovému vektoru.

Def: Ne-triviální lin. komb. je lin. komb., která není triviální

Def: Skupina vektorů $x_1, x_2, \dots, x_m$ je lineárně závislá,
pokud existuje ne-triviální lineární komb. těchto
vektorů, která je rovna nulovému vektoru

Def: Skupina vektorů $x_1, x_2, \dots, x_m$ je lineárně nezávislá, pokud není lineárně závislá.

Reprezentace Def (1)

LZ: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0$ a přitom aspoň jedno α_i je nenulové.

Def (2)

LN: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0$ pak musí $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

Pr: $\mathbb{R}^3$, $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 0, 2)$ LN nebo LZ?

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 1, 2) + \gamma(1, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + 2\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma, 2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta + 2\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$2\alpha + \beta = 0$$

$$3\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

LN

Def: konečná množina $K \subseteq L$ (L je lineární prostor) je lineárně závislá, pokud skupina vektorů $x_1, x_2, \dots, x_n$, kde $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je lineárně závislá.

Nekonečná množina $M \subseteq L$ je lineárně závislá, pokud existuje $K \subseteq M$ konečná, která je lineárně závislá.

Prázdá množina je vždy lineárně nezávislá

Množina $M \subseteq L$ je lineárně nezávislá, pokud není lineárně závislá.

Pr. Lin. prostor polynomů P . $M = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots\}$
 $K = \{x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_m}\} \subseteq M$ $k_i \neq k_j \quad \forall i \neq j$ $\nearrow$ je $\perp N$

$$\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \dots + \alpha_m x^{k_m} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m$$

je K je $\perp N$ $\nearrow$ bere se všechna K

Def: Necht $M \subseteq L$, L je lineární prostor

Lineární obal množiny M , značíme $\langle M \rangle$,

je $\left\{ \begin{array}{l} \text{pro } M \text{ konečnou: } \langle M \rangle \text{ je množina všech lin. kombinací} \\ \text{prvků z } M \mid \langle M \rangle = \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n; \alpha_i \in K \} \\ \text{pro } M \text{ nekonečnou: } \langle M \rangle \text{ je sjednocení lin. obalů } K \subseteq M, \\ \text{kde } K \text{ prochází všechny konečné podmnožiny } M \\ \langle M \rangle = \bigcup_{K \subseteq M} \langle K \rangle \end{array} \right.$

Pr $x \in L \quad \langle x \rangle = \{ \alpha x \}$

Věta. Necht $M \subseteq N$, $M \subseteq L$, $N \subseteq L$, L je lin. prostor.

1) $\langle M \rangle \subseteq \langle N \rangle$ 2) $M \subseteq \langle M \rangle$ 3) $\langle \langle M \rangle \rangle = \langle M \rangle$

$x \in M \Rightarrow x \in \langle M \rangle$
 $x = 1 \cdot x$

$x \in \langle \langle M \rangle \rangle$

$\exists y_1, y_2, \dots, y_n \in \langle M \rangle,$

$x = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$

$i = 1, \dots, n \quad y_i \in \langle M \rangle \Rightarrow \exists \mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{im} \in M,$

$y_i = \beta_{i1} \mu_{i1} + \beta_{i2} \mu_{i2} + \dots + \beta_{im} \mu_{im}$

Kritérium: $x \in \langle M \rangle$ právě tehdy,
 když existuje konečné mnoho
 $x_1, x_2, \dots, x_m \in M$ takové,
 že $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$

Věta: Necht $M \subseteq L$, L je lin. prostor

1) $\langle M \rangle$ je lineární podprostor L

2) M je lineární podprostor právě tehdy, když $\langle M \rangle = M$

Důk. 1) jasný

2) " $\Rightarrow$ " Důdp: $x \in M, y \in M, \alpha \in \mathbb{R} : \begin{cases} x+y \in M \\ \alpha \cdot x \in M \end{cases}$

$x \in \langle M \rangle; \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in M; x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \in M$ ✓

" $\Leftarrow$ " Důdp: $\langle M \rangle = M$ tj. každá konečná kombinace prvků $\in M$

$\in M$ leží v M . Tím kuplem byla dvě lin. komb.
Tj. M je lin. podprostor.

Věta ($L \subseteq L_2, L \subseteq L_1$): Vektory $x_1, x_2, \dots, x_m$ jsou LZ právě tehdy, když existuje index $k \in \{1, \dots, m\}$ tak, že $x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \alpha_i x_i$ (x_k je lineární kombinací ostatních vektorů)

Důk. " $\Rightarrow$ " Důdp. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0$ a zároveň $\alpha_k \neq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \alpha_i x_i &= -\alpha_k x_k \quad | \cdot (-\frac{1}{\alpha_k}) \\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \frac{\alpha_i}{-\alpha_k} x_i &= x_k \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ "

$$0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \alpha_i x_i + (-1) x_k$$

triviální lin. kombinace

dle def: $x_1, \dots, x_m$ jsou LZ

Věta: Necht' M, N jsou podprostory lin. prostoru L .
 Pak $M \cap N$ je podprostor, ale $M \cup N$ nemusí být.

Dk. $x, y \in M, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y \in M, \alpha \cdot x \in M$

$x, y \in N, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y \in N, \alpha \cdot x \in N$

$x, y \in M \cap N, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y \in M \cap N, \alpha \cdot x \in M \cap N$

$\nearrow \left(\begin{array}{l} x+y \in M, \alpha \cdot x \in M \\ x+y \in N, \alpha \cdot x \in N \end{array} \right) \nearrow$

$$L = \{(a, b), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\left. \begin{array}{l} M = \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\} \\ N = \{(0, a), a \in \mathbb{R}\} \end{array} \right\} \text{ lin. podprostory } L$$

$$(1, 0) \in M, (0, 1) \in N$$

$$(1, 0) \in M \cup N, (0, 1) \in M \cup N$$

$$\searrow + (1, 1) \notin M \cup N$$

Def: Spojení lin. podprostorů M, N nazýváme $M+N$ nebo $\langle M \cup N \rangle$
 a jedná se o $\langle M \cup N \rangle$

Pozorování: Spojení podprostorů je lin. podprostor

Pozorování: Platí $M+N = \{x+y; x \in M, y \in N\}$

Dk: viz def lin. obalu

Věta: Necht' L je lineární prostor, $M \subseteq L$.

Pak $\langle M \rangle$ je nejmenší podprostor obsahující M .

Důk: Q je podprostor, $M \subseteq Q$

$$\langle M \rangle \subseteq \langle Q \rangle = Q$$

shledávám $\langle M \rangle \subseteq Q$

Věta: Necht' M je lin. nezávislá množina, $x \notin \langle M \rangle$,
potom $M \cup \{x\}$ je rovněž lin. nezávislá množina.

Důk: sporom: necht' $M \cup \{x\}$ je LZ. tj. ex. $x_1, x_2, \dots, x_m \in M$,

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0$ je netriviální lin. komb.

$\begin{cases} \alpha_{m+1} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \\ \alpha_{m+1} \neq 0 \end{cases}$ spor s předpokladem, že M je nezávislá
 $x = \text{lin. komb. } \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m}_{\in M}$

spor s předp., že $x \notin \langle M \rangle$

a máme dokázáno

Příkladěch: Necht' $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^m$, pak tyto vektory jsou LZ pro $m < n$.
více neznámých než rovnic, existují mnoho řešení,
tj. aspoň jedno je netriviální

Def: Báze lineárního (pod)prostoru L je množina $B \subseteq L$ s vlastnostmi:

1) B je LN

2) $\langle B \rangle = L$

Pr: Množina $B = \{(1, 2, 3), (1, 1, 2), (1, 0, 2)\}$ je báze lin. prostoru $\mathbb{R}^3$

Ověříme: 1) B je LN, viz pr. ze začátku minulé přednášky

2) Kdyby $\langle B \rangle \neq \mathbb{R}^3$, $x \notin \langle B \rangle$, jeho předáním už nejsou LN

neplatí, tedy $\langle B \rangle = \mathbb{R}^3$ (viz Příkladěch)

Př: Maxima $B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ je také
báze lin. prostoru $\mathbb{R}^3$

Př: Necht P je lin. prostor všech polynomů

Pak $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots\}$ je báze tohoto lin. prostoru

Ověřuji 1) B je LN, viz př. z předchozí přednášky

2) $\langle B \rangle = P$ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ - je lin. komb.
prvků z B

Věta: 2 báze stejného lin. prostoru jsou buď nekonečné
nebo mají stejný počet prvků

Důk: Necht $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

jsou báze stejného lin. prostoru, necht $m < n$:

$$b_1 = \alpha_{11} c_1 + \alpha_{12} c_2 + \dots + \alpha_{1n} c_n$$

$\vdots$

$$b_m = \alpha_{m1} c_1 + \dots + \alpha_{mn} c_n$$

$$m \left\{ \begin{array}{c|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & b_1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & b_m \end{array} \right\}$$

b_1 je lin. komb. ostatních

Tj B není LN spor.

Def: Počet prvků báze lin. (pod)prostoru L nazýváme dimenze L ,
značím $\dim L$.

Pozorování: $\dim \mathbb{R}^m = m$

Hodnost matice

Def: Hodnost matice A , značím $\text{hod } A$, $k(A)$ je rovna dimenzi lineárního obalu řádků matice A .

Řádky matice typu (m, n) jsou vlastně prvky lin. prostoru $\mathbb{R}^n$

Značení: Lineární obal řádků matice A značím $\langle A \rangle$ (stejně jako o jeho křehlosti) $\langle A \rangle$

Věta: $A \sim B$ pak $\langle A \rangle = \langle B \rangle$

Důk: No to musí být vidět.

Věta: GEM nemění hodnost matice.

Věta: $\text{hod } A = \text{hod } A^T$

Důk: nevyžaduje

Pozorování: A je čtvercová, typu (n, n) , pak $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$

$\text{hod } A = n \Leftrightarrow$ všechny řádky jsou ^{sloupcy} $\neq 0 \Leftrightarrow A$ má inverzní matici $\Leftrightarrow A$ je regulární

$\det A = 0 \Leftrightarrow \text{hod } A < n \Leftrightarrow$ řádky/sloupce jsou $\neq 0 \Leftrightarrow A$ nemá inverzní matici $\Leftrightarrow A$ je singulární

Věta: Necht' L je lineární prostor, M, N jsou podprostory L ,

pak $\dim M + \dim N = \dim(M+N) + \dim M \cap N$

připomínka: $M+N = \langle M \cup N \rangle$ (předpokládáme konečné dimenze)

Důk:

$$\langle \underbrace{c_1, c_2, \dots, c_m}_{M} \mid \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_n}_{M \cap N} \rangle$$

báze $M \cap N = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, $\dim M \cap N = k$

báze $M = \{c_1, c_2, \dots, c_l, b_1, b_2, \dots, b_k\}$, $\dim M = l+k$

báze $N = \dots$, $\dim N = m+k$

báze $\langle M \cup N \rangle$, $\dim \langle M \cup N \rangle = k+l+m$

$$l+k + m+k = k+l+m+k$$

Def.: Uspořádaná báze (B) je báze B , kde káždě na pořadí prvků této báze.

Def.: Nechť L je lineární prostor, (B) je jeho uspořádaná báze, $\dim L = n$, pak souřadnice vektoru $x \in L$ jsou uspořádaná n -tice $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tak, že platí:
 $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$, kde $(B) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

Existence a jednoznačnost souřadnic

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= L \\ x &\in L \\ x &\in \langle B \rangle \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n = x \\ x - x &= 0 = \underbrace{(\alpha_1 - \beta_1)}_{=0} b_1 + \underbrace{(\alpha_2 - \beta_2)}_{=0} b_2 + \dots + \underbrace{(\alpha_n - \beta_n)}_{=0} b_n \\ &, \text{ (musí být triviální lín. komb.)} \end{aligned}$$

Pr: P_2 ... lineární prostor polynomů nejvýše 2. stupně

$$B_1 = (x+1, x-1, x^2+2) \quad B_2 = (x^2, x+2, 3)$$

nejdříve ověřit, jestli to opravdu jsou báze

$$p = 5x^2 + 2x + 4$$

souř p vzhledem k B_1 ?

$$p = \alpha(x+1) + \beta(x-1) + \gamma(x^2+2) = 5x^2 + 2x + 4$$

$$\gamma x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha - \beta + 2\gamma =$$

$$\underline{5 = \gamma}$$

$$2 = \alpha + \beta$$

$$4 = \alpha - \beta + 10$$

$$-6 = \alpha - \beta$$

2x

$$2\alpha = -4$$

$$\underline{\alpha = -2}$$

$$\underline{\beta = 4}$$

$$B_0 = (1, x, x^2)$$

$$p = (-2, 4, 5)_{(B_1)} = (5, 2, 0)_{(B_2)} = (4, 2, 5)_{(B_0)}$$

Soustavy lineárních rovnic

Def.: Necht A je matice typu (m, n) reálných čísel,
 b je matice typu $(m, 1)$ reálných čísel,
 x je matice typu $(n, 1)$ symbolů $x_1, x_2, \dots, x_n$

~~Soustava~~ Soustava m lineárních rovnic o n neznámých je
maticová rovnost $A \cdot x = b$ (*)

Def.: Řeší soustavu (*) znamená najít $M \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že $x \in M \Leftrightarrow A \cdot x = b$

Věta (Frobeniova): Soustava $Ax = b$ má řešení právě tehdy,
když $\text{hod } A = \text{hod}(A|b)$

$\uparrow$ matice soustavy
 $\sim$ rozšířená matice soustavy

Důk.: $\text{hod } A = \text{hod } A^T$ $\vec{b}^T \in \langle A^T \rangle$
 $\text{hod}(A|b) = \text{hod} \begin{pmatrix} A^T \\ \vec{b}^T \end{pmatrix}$ $\vec{b}^T$ je lineární kombinací řádků matice A^T ,
tj. sloupců matice A

$$\vec{b}^T = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m, \text{ tj. } \underbrace{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m)}_A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ejhle, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ je řešení soustavy $Ax = b$

Def.: Je-li $b = 0$, pak $Ax = 0$ nazýváme homogenní soustavou lin. rovnic.
Je-li $b \neq 0$, pak $Ax = b$ (*) nazýváme nehomogenní soustavou lin. rovnic.

Věta: Množina všech řešení soustavy (0) tvoří v $\mathbb{R}^n$ lineární podprostor.

Dk.: M je podprostor, právě tehdy, když $x, y \in M, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y \in M \checkmark$
 $\alpha x \in M \checkmark$

$$Ax=0, Ay=0, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow A \cdot (x+y) = Ax + Ay = 0+0=0$$

$$A \cdot (\alpha x) = \alpha \cdot Ax = 0$$

Př. $Ax=0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \textcircled{1} & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} x_2 = \mu & x_6 = 0 \\ x_4 = \nu & x_3 = -2\nu \\ x_5 = w & x_1 = -\mu + \nu - 3w \end{array}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-\mu - 3w + \nu, \mu, -2\nu, \nu, w, 0) =$$

$$= \mu(-1, 1, 0, 0, 0, 0) + \nu(-3, 0, 0, 1, 0, 0) + w(1, 0, -2, 0, 1, 0)$$

$$\mu, \nu, w \in \mathbb{R}$$

množ. řešení

$$M = \langle (-1, 1, 0, 0, 0, 0), (-3, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, -2, 0, 1, 0) \rangle$$

$$Ax=0 \sim Cx=0$$

GEM nemění množinu řešení soustavy

Počet proměnných, které nabývají lib. hodnot (volím pro ně parametry) = počet všech proměnných - hod $A = n - \text{hod } A$,
 vidíme, že $\dim M = n - \text{hod } A$

prostor řešení homogenní soustavy

Nehomogenní rovnice

Def. Necht $Ax=b$ je soustava nehomogenních rovnic.

Pak soustava $Ax=0$ nazýváme přidruženou soustavou homogeních rovnic k dané nehomog. soustavě $Ax=b$

Věta : 1) Necht u, v jsou řešení nehomog. soustavy $Ax=b$.

Pak $u-v$ je řešení přidružené homog. soust. $Ax=0$.

2) Necht u je nehomogenní soustavy $Ax=b$, w je řešení přidružené homog. $Ax=0$. Pak $u+w$ je řešení nehomog. $Ax=b$.

Dk. : 1) $Au=b$, $Av=b$ $A(u-v) = Au - Av = b - b = 0$

2) $Au=b$, $Aw=0$ $A(u+w) = Au + Aw = b + 0 = b$

Důsledek. Necht u je nějaké řešení nehomogenní soustavy $Ax=b$ (u je tzv. partikulární řešení).

Pak pro každé řešení v nehomogenní soustavy $Ax=b$ existují řešení w přidruž. homog. soust. tak, že $v = u + w$.

$$M = u + \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle \quad \text{množina řešení}$$

Pr
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$x_6 = 2$$

$$x_3 = -2x_5 - 2$$

$$x_1 = -1 - x_2 + x_5 - 3x_4$$

x_5, x_4, x_2 libovolné
(parametry)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-1 - x_2 + x_5 - 3x_4, x_2, -2x_5 - 2, x_4, x_5, 2) =$$

$$= (-1, 0, -2, 0, 0, 2) + x_2(-1, 1, 0, 0, 0, 0) + x_4(-3, 0, 0, 1, 0, 0) + x_5(1, 0, -2, 0, 1, 0)$$

$$M = (-1, 0, -2, 0, 0, 2) + \langle (-1, 1, 0, 0, 0, 0), (-3, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, -2, 0, 1, 0) \rangle$$

$$u + \langle u_1, u_2, \dots, u_h \rangle \stackrel{?}{=} v + \langle v_1, v_2, \dots, v_h \rangle$$

$$\text{hod} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_h \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_h \\ u-v \end{pmatrix} = h$$

kontrola, zda 2 zápisy
popisují stejné řešení

Soustava se čtvercovou maticí A

$$Ax = b$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{hod } A = \text{počet řádků} \Leftrightarrow \det A \neq 0, \text{ tj. existuje } A^{-1}, \\ \hspace{10em} A \cdot x = b \quad / \cdot A^{-1} \quad A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b \\ \hspace{10em} x = A^{-1} \cdot b \\ \text{hod } A < \text{počet řádků} \Leftrightarrow \det A = 0, \text{ tj. po eliminaci} \\ \hspace{10em} \text{už nemáme čtvercovou matici} \rightarrow \text{golo předpokladu.} \end{array} \right.$

Věta (Cramerova): Necht' A je čtvercová matice, $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ je řešení soustavy $Ax = b$, $\det A \neq 0$

Pak $x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$, kde B_i je matice A , kde jsme nahradili i -tý sloupec sloupcem pravých stran.

$$\text{Pr.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 7 & 12 \end{array} \right) \rightsquigarrow x_i = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 11 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}}$$

$$\underline{\text{Důk.}}: x = A^{-1}b \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} (D_{ji})$$

$$x_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\det A} \cdot (D_{ji}) \cdot b_j = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n D_{ji} \cdot b_j = \frac{1}{\det A} (D_{i1}b_1 + D_{i2}b_2 + \dots + D_{in}b_n) = \frac{\det B_i}{\det A}$$

Def. Necht $(B) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ je uspořádaná báze lin. prostoru L ,
 $(C) = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ je také uspoř. báze L

Pak matici typu (m, m) , pro kterou platí:

$(b_1, b_2, \dots, b_m) \cdot A = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ nazývá
 matici přechodu od báze (B) k bázi (C) a značí $A(b, c)$

$$c_i = a_{i1} \cdot b_1 + a_{i2} \cdot b_2 + \dots + a_{im} \cdot b_m$$

1. sloupce obsahuje souř. vzhledem k (B)

Věta: Necht $(B), (C), (D)$ jsou uspořádané báze, matice
 přechodu $A(B, C), A(C, D)$. Pak $A(B, D) = A(B, C) \cdot A(C, D)$

Dk.: $(B) \cdot A(B, C) = (C)$

$(C) \cdot A(C, D) = (D)$

$$(B) \cdot A(B, D) \cdot A(B, D) = (C) \cdot A(C, D) = (D)$$

Věta Jestliže $A(B, C)$ je mat. přechodu od (B) k (C) a $A(C, B)$ je
 mat. přechodu od (C) k (B) , pak platí:

$$A(C, B) = (A(B, C))^{-1}$$

Dk.: $(b_1, \dots, b_m) \cdot A(B, C) = (c_1, \dots, c_m) \quad / \cdot A^{-1}_{(B, C)}$ sprava

$$(b_1, \dots, b_m) = (c_1, \dots, c_m) \cdot A^{-1}_{(B, C)}$$

Dokazování: Matice přechodu je regulární.

Pozn. [Simpson-Pandeth]: $A^T \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ Tento vztah definuje
 stejnou matici přechodu.

$$\text{Protože } (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Věta: Necht $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)_{(B)} = (y_1, y_2, \dots, y_m)_{(C)}$, necht $A_{(B,C)}$ je matice přechodu od (B) k (C) . Pak platí

$$A_{(B,C)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Pozor: transformuje souřadnice opačně než se jmenuje,
 potvrdit

Důk. někdy doplnit

Věta: Necht $(B) = (b_1, \dots, b_m)$, $(C) = (c_1, \dots, c_n)$ jsou báze prostoru $\mathbb{R}^n$.

Pak $\left(A_{(C,B)} \mid E \right) \sim \left(b_1^T \ b_2^T \ \dots \ b_m^T \mid c_1^T \ c_2^T \ \dots \ c_n^T \right) \sim \left(E \mid A_{(B,C)} \right)$

Důk: měl dodat ...

Lineární zobrazení

$a: M \rightarrow N$ zobrazení z M do N

libovolné množiny (ležejících nad sebou...)

prosté zobrazení: $x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2$ pak $a(x_1) \neq a(x_2)$

Def. Zobrazení $a: L_1 \rightarrow L_2$, kde L_1, L_2 jsou nějaké prostory, nazýváme lineární, pokud $\forall x, y \in L_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$1) \ a(x+y) = a(x) + a(y)$$

$$2) \ a(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot a(x)$$

$\uparrow$ v L_1

$\uparrow$ v L_2

Pr. $L_1 \dots$ lineární prostor diferencovatelných funkcí $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$L_2 \dots$ lineární prostor funkcí $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(f) = f'$$

$$1) \quad d(f+g) = (f+g)' = f' + g' = d(f) + d(g) \quad \checkmark$$

$$2) \quad d(\alpha \cdot f) = (\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f' = \alpha \cdot d(f) \quad \checkmark$$

U $d: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : d(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_3)$

$$d((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = d(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2), 2(x_1 + y_1) - (x_3 + y_3))$$

$$(x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_3) + (y_1 + 2y_2, 2y_1 - y_3) =$$

add.

Princip superpozice

Zobrazení $d: L_1 \rightarrow L_2$ je lineární právě tehdy, když $\iff$

$$d(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot d(x) + \beta \cdot d(y)$$

Důk. $\Rightarrow d(\alpha x + \beta y) \stackrel{(1)}{=} d(\alpha x) + d(\beta y) \stackrel{(2)}{=} \alpha \cdot d(x) + \beta \cdot d(x)$

$\Leftarrow$ 1) $\alpha = 1, \beta = 1$

$$d(x + y) = d(x) + d(y) \quad \checkmark$$

2) $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 0$

$$d(\underbrace{\alpha x}_{\sigma_{L_1}} + \underbrace{0y}_{\sigma_{L_2}}) = d(\alpha x) = \alpha \cdot d(x) + \underbrace{0 \cdot d(y)}_{\sigma_{L_2}} = \alpha \cdot d(x) \quad \checkmark$$

Pozorování: $d(\sigma_{L_1}) = \sigma_{L_2}$

$d(x) = \sigma_{L_2}$... může platit pro více x
např. příklad s derivací

Def: Nechť $A: L_1 \rightarrow L_2$ je lineární.

Množinu $\text{Ker } A = \{x \in L_1, A(x) = 0_{L_2}\}$ nazýváme kernel (jádro) lin. zobrazení A .

Množina $A(L_1) \subseteq L_2$ nazýváme oborem hodnot zobrazení A .

Pozorování: 1) $\text{Ker } A$ je lin. podprostor v L_1

2) $A(L_1)$ je lin. podprostor v L_2

1) $x \in \text{Ker } A, y \in \text{Ker } A \stackrel{?}{\Rightarrow} x+y \in \text{Ker } A \quad \checkmark$

$$\text{tj. } A(x) = 0_{L_2}, A(y) = 0_{L_2} \quad A(x+y) = A(x) + A(y) = 0 + 0 = 0$$

$$x \in \text{Ker } A, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot x \in \text{Ker } A$$

$$A(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot A(x) = \alpha \cdot 0 = 0$$

2) každý členár zde dokáže sám

Def. $\dim \text{Ker } A = \text{def } A$ (defekt)

$\dim A(L_1) = \text{hod } A$ (hodnota)

Př. do $\mathbb{R}$ derivacemi

$\text{Ker } A = \{f, f \text{ je konstanta}\}$, báze $\text{Ker } A = \{1\}$ ^{konstantní jednotka}

$$\text{def } A = 1 \quad \text{hod } A = \infty$$

do $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$

$$\text{Ker } A = \{(x, y, z) : (x+2y, 2x-z) = (0, 0)\} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = t \quad x_3 = -4t \quad x_1 = -2t$$

$$\rightarrow \langle (-2, 1, -4) \rangle$$

$$\text{def } A = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & y_1 \\ 2 & 0 & -1 & y_2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & y_1 \\ 0 & -4 & -1 & y_2 - 2y_1 \end{array} \right)$$

$$A(L_1) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\text{hod } A = 2$$

Věta: Necht B je báze L_1 , $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$,
necht $y_1, y_2, \dots, y_m \in L_2$.

Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $A: L_1 \rightarrow L_2$
sahové, že $A(b_i) = y_i \quad \forall i \in 1, \dots, m$

Důk. Existence? $\checkmark$

$$A(x) = ? \quad x \in L_1$$

existují $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ sahová, že $x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m$

$$A(x) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_m y_m$$

Je A lineární? $\checkmark$

$$x, y = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m$$

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1) b_1 + \dots + (\alpha_m + \beta_m) b_m$$

a náhodou
podobně

Jednoznačnost

zobrazení A, B ; $A - B$ je lineární

$$(A - B)(x) = (A - B)(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m) =$$

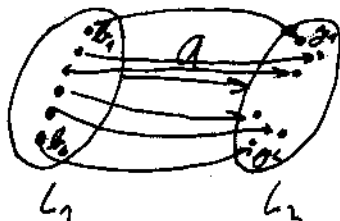
princ. superpozice

$$= \alpha_1 (A - B)(b_1) + \dots + \alpha_m (A - B)(b_m)$$

$$y_1 - y_1$$

$$\alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_m \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

Aj $A = B$ na celém L_1



Věta: Pro lineární zobrazení $A: L_1 \rightarrow L_2$ jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

- (i) A zobrazuje vždy LN vektory na LN vektory
 - (ii) $\det A \neq 0$
 - (iii) A je prosté
- důkaz větu si dovoлил redobárat a nezkoušel

Def: Lineární zobrazení $A: L_1 \rightarrow L_2$, které je prosté a na, nazýváme izomorfismem.

Lineární prostory, mezi kterými existuje izomorfismus, nazýváme izomorfní.

Pozorování: Necht' L je konečné dimenze n , $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ je báze L .

Pak zobrazení $L \rightarrow \mathbb{R}^n$ které každému $x \in L$ přiřadí jeho souřadnice vzhledem k bázi (B) je izomorfismus.

Důsledek: Jakýkoliv L konečné dimenze je izomorfní s $\mathbb{R}^n$.

Def: Necht' L_1 má bázi $(B) = (b_1, \dots, b_m)$, L_2 má bázi $(C) = (c_1, \dots, c_m)$ a necht' je dáno lin. zobrazení $A: L_1 \rightarrow L_2$.

Pak matice A , která splňuje:

$$(*) \quad (A(b_1), A(b_2), \dots, A(b_m)) = (c_1, c_2, \dots, c_m) \cdot A$$

je nazývá matice zobrazení A vzhledem k bázím (B) a (C)

Pozorování: A je typu (m, m) a existuje pro $\forall A$

Obrácení: $\forall A$ ^{typu (m, m)} existuje jednoznačně zobrazení A s vlastností $(*)$
(viz věta o jednoznačnosti A podle hodnot A na bázi)

Pozorování $(*)^T$: $\begin{pmatrix} A(b_1) \\ \vdots \\ A(b_m) \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ to je v literatuře častější nápis těchto

Věta: Necht $(B) = (b_1, \dots, b_n)$ je báze L_1 , $(C) = (c_1, \dots, c_m)$ je báze L_2 .

$A: L_1 \rightarrow L_2$ je lineární a má matici A vzhledem k bázím (B) a (C) .

Necht $x \in L_1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{(B)}$, $A(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m)_{(C)}$.

Pak platí:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Důk: } x &= x_1 b_1 + \dots + x_n b_n, \quad y = y_1 c_1 + \dots + y_m c_m \\ (A(b_1), \dots, A(b_n)) &= (c_1, \dots, c_m) \cdot A \\ A(x) &= A(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n) = x_1 A(b_1) + \dots + x_n A(b_n) = \\ &= x_1 (c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \dots + c_m a_{1n}) + \dots + x_n (c_1 a_{n1} + c_2 a_{n2} + \dots + c_m a_{nm}) = \\ &= c_1 (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \dots + x_n a_{n1}) + c_2 (x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{n2}) + \dots + c_m (x_1 a_{1m} + x_2 a_{2m} + \dots + x_n a_{nm}) \end{aligned}$$

Věta: Necht (B) je uspoř. báze lin. prostoru L_1 ,

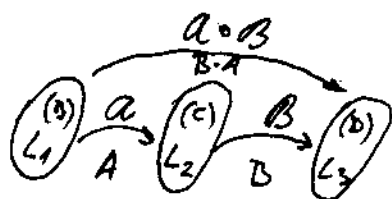
(C) — " — L_2

(D) — " — L_3 ,

Necht $A: L_1 \rightarrow L_2$ lineární, $B: L_2 \rightarrow L_3$ lineární,

A je matice vob. A vzhledem k $(B), (C)$, B je mat. vob. B vzhledem k $(C), (D)$.

Pak $B \cdot A$ je matice složeného zobraz. $A \cdot B: L_1 \rightarrow L_3$ vzhledem k bázím $(B), (D)$



$$(A \circ B)(x) = B(A(x))$$

$$\text{Nt: } (A(b_1), \dots, A(b_n)) = (c_1, \dots, c_m) \cdot A$$

$$(B(c_1), \dots, B(c_m)) = (d_1, \dots, d_p) \cdot B \quad | \cdot A$$

$$(B(c_1), \dots, B(c_m)) \cdot A = (d_1, \dots, d_p) \cdot B \cdot A$$

... zkrátit s $\circ$ důkazem

$$\text{jinak: } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} \quad B \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$$

Věta: Necht (B) je báze L_1 , (C) je báze L_2 , A je lineární zobrazení:
 $L_1 \rightarrow L_2$, A je matice zobrazení A vzhledem k $(B), (C)$.

$\text{Rok } \text{Kod } A = \text{Kod } A$

Důk. $\text{Kod } A = \dim A(L_1) = \dim \langle A(b_1), \dots, A(b_m) \rangle =$
 $= \dim \langle (c_1, \dots, c_m) \cdot 1. \text{ sloupec } A, (c_1, \dots, c_m) \cdot 2. \text{ sloupec } A, \dots, (c_1, \dots, c_m) \cdot n. \text{ sloupec } A \rangle$
 $= \dim \langle \text{sloupce } A \rangle = \dim \langle \text{řádky } A \rangle = \text{Kod } A$
 protože $\text{Kod } A = \text{Kod } A^T$

Věta: $\dim A + \text{Kod } A = \dim L_1$

Důk. $\dim A = \dim \text{Ker } A = \dim \{x, A(x) = 0\} \xrightarrow[\text{(souřadnice)}]{\text{izomorfismus}} \dim M$
 $\dim \left\{ (x_1, \dots, x_m); A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \dim M$, M je množ. řešení
 homogenní soust. lin. rovnic
 $=$ počet parametrů $=$
 $=$ počet pramenů $=$ $\dim L_1 - \text{Kod } A$
 $\dim A = \dim L_1 - \text{Kod } A$

Lineární prostory se skalárním součinem

Def: Necht L je lin. prostor, na kterém je navíc definována operace $\cdot : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ s těmito vlastnostmi: $\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(2) \quad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

$$(3) \quad (\alpha \cdot x) \cdot y = \alpha \cdot (x \cdot y)$$

$$(4) \quad x \cdot x \geq 0, \text{ navíc } x \cdot x = 0 \text{ jen pro } x = 0,$$

pak L nazýváme lineární prostor se skalárním součinem.
a toho např.

$$0 \cdot x = (0 \cdot y) \cdot x = 0 \cdot (y \cdot x) = 0$$

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

Def: Necht L je lin. prostor se skal. součinem, $x \in L, y \in L$

Pak velikost x (značíme $|x|$) definujeme $|x| = \sqrt{x \cdot x}$
($|x|^2 = x \cdot x$)

Necht $x, y \in L$ jsou nenulové, pak úhel φ mezi vektory x, y je definován vztahem $\cos \varphi = \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}$

Ověřte: je velikost a úhel jednoznačně def.?

$$|\alpha| \cdot |x| = |\alpha \cdot x|$$

$$|\alpha \cdot x|^2 = (\alpha \cdot x)(\alpha \cdot x) \stackrel{(3)}{=} \alpha^2 (x \cdot x)$$

$$|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$$

Lemma (Schwarzova rovnost): Necht $x \in L, y \in L$, pak $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$

Důk: $z = x - \alpha y$

$$0 \leq (x - \alpha y) \cdot (x - \alpha y) = x \cdot x - x \cdot (\alpha y) - (\alpha y) \cdot x + (\alpha y) \cdot (\alpha y) =$$

$$= |x|^2 - 2\alpha x \cdot y + \alpha^2 |y|^2 \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

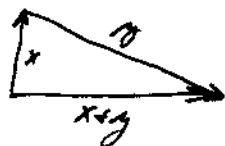
$$4(x \cdot y)^2 - 4|y|^2|x|^2 = D \leq 0 \quad \text{nebo} \quad (x \cdot y)^2 \leq |x|^2|y|^2 / 1 \quad \rightarrow \quad |x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$$

Def: Vzdálenost mezi x a y je $|x - y|$

Δ nerovnost:

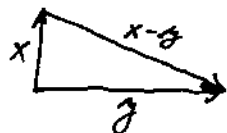
$$|x| + |y| \geq |x + y|$$

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)(x+y) = x \cdot x + 2 \cdot x \cdot y + y \cdot y = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \leq \\ &\leq |x|^2 + 2|x \cdot y| + |y|^2 = |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \quad / \sqrt{} \end{aligned}$$



Def: Necht' $x, y \in L$ se stal. součinem, ^{nenulové} x, y jsou kolmé, pokud $x \cdot y = 0$, značíme $x \perp y$

Křda Necht' $x \perp y$. Pak $|x|^2 + |y|^2 = |x - y|^2$



$$\begin{aligned} (x-y)(x-y) &= x \cdot x - 2 \cdot \boxed{x \cdot y} + y \cdot y = |x|^2 + |y|^2 \\ &\text{a Pythagorova věta dokázána!} \end{aligned}$$

Def: Necht' $B = (b_1, \dots, b_m)$ je báze lin. prostoru L se stal. součinem.

B je ortogonální, pokud $b_i \perp b_j \quad \forall i \neq j, i \in \{1, \dots, m\},$
 $j \in \{1, \dots, m\} \quad (d.j. \ b_i \cdot b_j = 0)$

B je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc $|b_i| = 1,$
 $i \in \{1, \dots, m\}$

Dokazování: B je ortonormální právě tehdy, když

$$b_i \cdot b_j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Věta: Necht' (B) je uspořádaná ortonormální báze lin. prostoru L se skalárním součinem.

Nach $\vec{x} \in L$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{(B)}$, $\vec{y} \in L$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_{(B)}$.

Def $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Def: (B) = ($\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$), $\vec{x} = x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_m \vec{b}_m$, $\vec{y} = y_1 \vec{b}_1 + \dots + y_m \vec{b}_m$

[illegible]

Věta: Necht (B) je uspořádan. orthonorm. báze, $(B) = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$

Рак $\vec{x} \in L$, $x = (\vec{x} \vec{b}_1, \vec{x} \vec{b}_2, \dots, \vec{x} \vec{b}_3)$

DB: mental

Věta: Necht $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ jsou navzájem na sebe kolmé (a nenulové).

Patrui liniare independente.

$$\underline{Dk}: \quad \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m = \vec{0} \quad | \cdot \vec{x}_i, i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\alpha_1 \vec{x}_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m \vec{x}_m = \vec{0} \cdot \vec{x}_j = 0$$

$$\alpha_7 |x_7|^2 \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \quad = 0$$

$$\alpha_1 / x_1^2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \varphi$$

$\frac{u \cdot v}{|u||v|}$.. kosinus právního úhlu

Lin. prostor V_3 volných vektorů

Vektorový součin ve V_3

Def. Pokud $\vec{u}, \vec{v}$ jsou $\perp Z$, pak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

Pokud $\vec{u}, \vec{v}$ jsou $\perp N$, pak

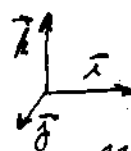
1) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$

2) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi$

3) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ tvoří kladně orientovanou bázi

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

antikomutativní zákon



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

kladně orientovaná báze
ostává stejná podle det
matice přechodu

Věta $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

geom. vlastnost vektor součinu

velikost vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna ploše

rovnoběžníka



$$\varphi = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Věta: Necht (B) je uspořádaná kladně orientovaná orthonormální

báze ve V_3 , $u = (u_1, u_2, u_3)_{(B)}$, $v = (v_1, v_2, v_3)_{(B)}$

pak

$$\text{Pak } u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)_{(B)}$$

Dů: ponechám laškovému čtenáři

Pozorování: Navzdít od ostatních součinů lze definovat jin
a lin. prostorů dimenze 3.

Smíšený součin ve V_3 se definuje jako číslo $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Smíšený součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (v tomto pořadí) je $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Věta: Necht (B) je uspořádaná kladně orientovaná báze ve V_3 ,

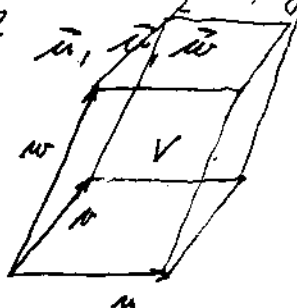
$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_{(B)}, \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_{(B)}, \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_{(B)}$$

$$\text{Poté } \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Dů: pomínil - připadá se

Věta (geometrická orientace)

Absolutní hodnota smíšeného součinu je rovna objemu
rovnoběžnostěny, jehož hrany jsou reprezentovány
vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$



$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

Euklidovský bodový prostor kombinovaný s V_3

$$\text{bod} + \text{vektor} = \text{bod}$$

$$\text{bod} - \text{bod} = \text{vektor}$$

$$\text{vektor} \pm \text{vektor} = \text{vektor}$$



Souřadnicový systém Euklid. prostoru:

$$O, (B) \quad (B) \text{ jakákoliv báze}$$

Kartézský souřadnicový systém $O, (B)$ - orthonormální

souřadnice A je bodový se souřad. vektorem $A-O$

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$A + v = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3) = \text{Bool}$$

Příklad $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 2, 1)$, $C = (1, 1, 4)$, souřadnice vzhledem
ke kartézskému systému souřadnic
Plocha $\triangle ABC = ?$

$$\vec{u} = B - A = (2, 2, 1) - (1, 2, 3) = (1, 0, -2)$$

$$\vec{v} = C - A = (1, 1, 4) - (1, 2, 3) = (0, -1, 1)$$

$$P_{\square} = |\vec{u} \times \vec{v}| = |(2, -1, -1)| = \sqrt{(2, -1, -1)(2, -1, -1)} = \sqrt{6}$$

$$P_{\triangle} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$V_{\text{těl. systému}} = \frac{V_{\text{rovnoběžnostěny}}}{6}$$



$$\varphi = A + \langle \vec{v} \rangle \quad (\text{přímka})$$

~ směrový vektor

$$\rho = A + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \quad (\text{rovina})$$

Předpoklad: Souřadnice bodů a vektorů, se kterými budeme pracovat, jsou dány vzhledem ke konkrétnímu souřadnému systému, tj. vektory mají souřadnice vzhledem ke kladně orientované orthonormální bázi.

Příklad: $X = A + \langle \vec{s} \rangle$ $X = A + t \cdot \vec{s}, t \in \mathbb{R}$
 $(x_1, x_2, x_3) (a_1, a_2, a_3) (s_1, s_2, s_3)$ $(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3) + t(s_1, s_2, s_3)$

$$x_1 = a_1 + t s_1$$

$$x_2 = a_2 + t s_2$$

$$x_3 = a_3 + t s_3$$

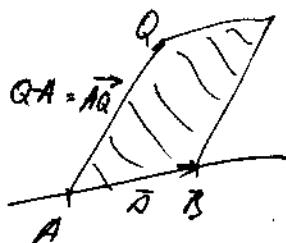
parametrické rovnice přímky

$$\frac{x_1 - a_1}{s_1} = \frac{x_2 - a_2}{s_2} = \frac{x_3 - a_3}{s_3}$$

kanonický tvar

Příklad:

Vzdálenost bodu od přímky



$$P = |\vec{AQ} \times \vec{s}|$$

$$P = n \cdot |\vec{s}| \Rightarrow n = \frac{|\vec{AQ} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

Pr: $P: (1, 2, 3) + t(1, 1, 4), t \in \mathbb{R}, Q = (2, 4, 7)$

$$n = \sqrt{\frac{17}{18}}$$

Vzájemná poloha přímek

$$p: A + \langle \vec{s} \rangle$$

$$q: B + \langle \vec{u} \rangle$$

leží ve společné rovině $\Leftrightarrow \vec{s}, \vec{u}, \vec{AB}$ jsou LN
úloha: vzdálenost mimoběžek

$$v = \frac{\begin{vmatrix} \vec{s} & \vec{u} & \vec{AB} \end{vmatrix}}{|\vec{s} \times \vec{u}|} \quad - \text{vektory } \vec{s}, \vec{u}, \vec{AB}$$

leží ve společné rovině $\Leftrightarrow \vec{s}, \vec{u}, \vec{AB}$ jsou LZ

rovnoběžky $\Leftrightarrow \vec{s}, \vec{u}$ jsou LN,

úloha: průsečík, úhel

$$\text{úhel} = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{s}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{s}|}$$

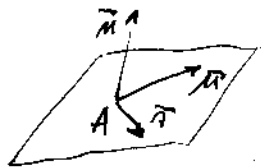
rovnoběžky $\Leftrightarrow \vec{s}, \vec{u}$ jsou LZ

úloha - vzdálenost $\begin{cases} = 0 \dots \text{kolozné} \\ \neq 0 \dots \text{rovnoběžky} \end{cases}$

$\begin{cases} = \text{vzdál bodu } B \text{ od přímky } A + \langle \vec{s} \rangle \end{cases}$

Rovina

$X = A + \langle \vec{s}, \vec{u} \rangle$, kde $\vec{s}, \vec{u}$ jsou směrové, lineárně nezávislé vektory roviny



$$X = A + t \cdot \vec{s} + \lambda \cdot \vec{u}, \quad t, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3) + t(a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3), \quad t, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$X \in \text{rovině} \Leftrightarrow (X - A) \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{AX} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) \cdot (u_1, u_2, u_3) = 0$$

$\vdots$

$$u_1(x_1 - a_1) + u_2(x_2 - a_2) + u_3(x_3 - a_3) = 0$$

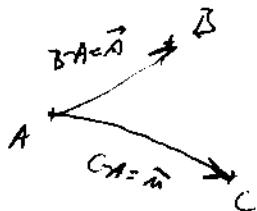
$$\vec{n} = (a, b, c) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \quad \therefore \text{skalární rovnice roviny}$$

převod $X, \vec{AX}, \vec{n}, \vec{s}$ jsou LŽ

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

semele se-a
vypadne

rovina dána 3 body



$$A = (1, 2, 3)$$

$$B - A = (-1, 0, -2)$$

$$B = (2, 2, 1)$$

$$C - A = (3, -1, -1)$$

$$C = (4, 1, 2)$$

$$\vec{s} \times \vec{u} = (-2, 4, -1) = \vec{n}$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 1x_3 + d = 0$$

$$-2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 + d = 0$$

$$d = -3$$

$$\underline{-2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3 = 0}$$

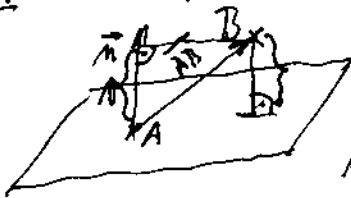
Vzájemná poloha přímky a roviny

$p \parallel \pi$ nebo leží v $\pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n}, \text{ tj. } \vec{s} \cdot \vec{n} = 0$
 vzdálenost p od $\pi \Leftrightarrow$ vzdál bodu přímky od roviny
 přímka protíná rovinu v 1. bodě $\Leftrightarrow \vec{s} \nparallel \vec{n}, \text{ tj. } \vec{s} \cdot \vec{n} \neq 0$
 úloha: průsečík?, φ ?

dosažením parametr rovnic přímky do rovnice roviny

$$\varphi = 90^\circ - \arccos \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \arcsin \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$$

φ vzdálenost bodu od roviny
 je rovna kolmému průměru $\overline{AB}$ na $\vec{n}$



$$v = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$p: x + y - 2z + 4 = 0$$

$$B = (1, 4, 3)$$

$$A = (0, 0, 2)$$

$$\vec{AB} = (1, 4, 1)$$

$$v = \frac{|(1, 4, 1) \cdot (1, 1, -2)|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|1+4-2|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

Vzájemná poloha rovin

$$\rho: \vec{n}, A$$

$$\pi: \vec{m}, B$$

rovnoběžné nebo splývají $\Leftrightarrow \vec{n}, \vec{m}$ jsou $\perp \mathbb{Z}$
 vzdálenost = bod A od π

různoběžné $\Leftrightarrow \vec{n}, \vec{m}$ jsou $\perp \mathbb{N}$

úloha - průsečík

řešení soust. skal. rovnic rovin

- úhel mezi rov. = úhel mezi $\vec{n}, \vec{m}$