

Josef Tkadlec

math.feld.couv.cz/tkadlec/uyuba.htm

Číselné obory :

- $\mathbb{N}$.. přirozená čísla $1, 2, \dots$
- $\mathbb{Z}$.. celá čísla $0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- $\mathbb{Q}$.. racionální čísla $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$
- $\mathbb{R}$.. reálná čísla $0, \sqrt{2}, \pi, e, \dots$
- $\mathbb{C}$.. komplexní čísla $x + jy$

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.. iracionální

Množina : soubor objektů (prvků)

$A = \{1, 2, 3\}$ (výčet prvků)

$1 \in A$

$4 \notin A$

(1 nepatří do A)

$\{x : V(x)\}$ (prvky mající nějakou vlastnost)

$B = \{x : x \text{ je dvojnásobkem přiroz. čísla}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$
většinou stačí

$\{x \in M : V(x)\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (kladná r. čísla)

$D = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}\}$

rovnost (=) $A = B$... A má stejné prvky jako B

$A \neq B$... A nemá " " "

inkluze

$A \subseteq \dots$ A je částí (podmnožinou) B

každý prvek A je prvkem B

$A \subsetneq B$... A je vlastní část (podmnožina) B ... $A \subseteq B, A \neq B$

$A = B$... $A \subseteq B, B \subseteq A$

$B \not\subseteq A$

$\emptyset, \{\}$... prázdná množina

$\emptyset \subseteq A$ pro každou A

$$A \subseteq A$$

průnik $A \cap B$... prvky ležící v A a zároveň v B

sjednocení $A \cup B$

rozdíl $A \setminus B$... prvky ležící v A , nebo

$B \subseteq A \Rightarrow A \setminus B$ doplněk B v A

A, B jsou disjunktní ... $A \cap B = \emptyset$

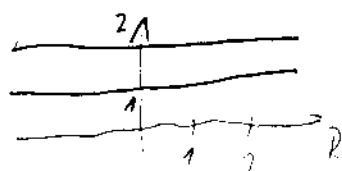
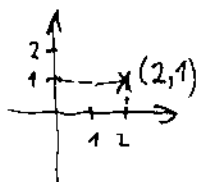
$$A \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$\cap$ je komutativní, asociativní, distributivní k $\cup$
kartézský součin $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{N}$$

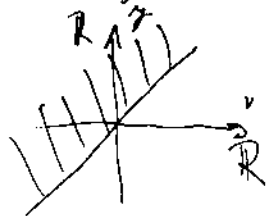


relace je podmnožina $A \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(a, b) \in R$
 $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$

pr.: $=$ na $\mathbb{R}$

$$x = y ; = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

pr.: $x \leq y$
na $\mathbb{R}$



inverzní relace : $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$

D.: Zobrazení A do B je podmnožina $f \subseteq A \times B$ taková, že
 pro každé $a \in A$ ex. právě jedno $b \in B$ tak, že $(a, b) \in f$
 $b = f(a)$... předpis, $f: A \rightarrow B$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 obraz obraz $a \mapsto b$

definici obor f ... množina $a \in A$, které mají obraz, $D(f)$
 obor hodnot f ... množina $b \in B$, které jsou obrazy
 prvků z A , $R(f)$

{ prosté zobrazení ... různým prvkům odpovídají různé obrazy
 zobrazení na B ... $R(f) = B$
 dokromady - vzájemně jednoznačné (~~///~~ bijekce)

Inverzní relace k zobrazení f je zobrazení právě tehdy,
 když f je vzájemně jednoznačné

$$\left. \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \quad \dots \quad f: A \rightarrow R(f) \\ \text{pohled zpět} \end{array} \right\} f^{-1}: R(f) \rightarrow A$$

Množiny A, B mají stejnou mohutnost, jestliže existují
 bijekce A na B .

Společná množina je taková, která má stejnou mohutnost
 jako N

př. Z je společná

$$\begin{array}{ccccccccc} N & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ Z & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \end{array}$$

př. Q je společná

$$\begin{array}{l} 1. \text{ kladná rac. č.: } \text{čís.} + \text{jm} = 2 : \frac{1}{1} \\ \phantom{1. \text{ kladná rac. č.: }} = 3 : \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1} \right) \\ \phantom{1. \text{ kladná rac. č.: }} = 4 : \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} N & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ Q & 0 & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots \end{array}$$

př. R není spočetná

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ není na

$1 \mapsto a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

$2 \mapsto b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$

$3 \mapsto c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$

!

$0, x_1 x_2 x_3 \dots \notin R(f)$

přiroz. čísla

$0 = \emptyset$

$1 = \{\emptyset\} = \{0\}$

$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Základy logiky

výrok: tvrzení, v kterém má smysl říci, zda je pravdivé

→ pravdivostní ohodnocení: pravda / lež

A : přišel B : Na obloze jsou mraky. ano / ne

negace: není pravda, že A , $\neg A$ 1/0

A	$\neg A$
1	0
0	1

konjunkce A a (zároveň) B , $A \wedge B$

disjunkce A nebo B , $A \vee B$

implikace jestliže A , pak B , $A \Rightarrow B$

ekvivalence A právě tehdy, když B ; $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

$A \Rightarrow B$: jestliže přišel, pak jsou na obloze mraky. } $A \Rightarrow B$ je něco jiného, než $B \Rightarrow A$!

$B \Rightarrow A$: jestliže jsou na obloze mraky, pak přišel.

$\neg B = \neg A \dots \models A \Rightarrow B$

↑ tautologicky ekvivalentní

$\neg \neg A \models A$

$A \Rightarrow B \models (\neg A \vee B)$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

formule: tautologie (vždy pravdivá) př. $A \vee \neg A$
 kontradikce (vždy nepravdivá) př. $A \wedge \neg A$

kvantifikátory

$\forall x : V(x)$ "pro každé x platí $V(x)$ "

$\exists x : V(x)$ "existuje x , pro které platí $V(x)$ "

$\forall x \in \mathbb{R} : (x \geq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R} : x = y^2))$ (nekáždé reálné číslo má druhou odmocninu)

negace

$\exists x \in \mathbb{R} : (x \geq 0 \wedge (\forall y \in \mathbb{R} : x \neq y^2))$

Úsudky:

Průs.

Jestliže prší, pak jsou na obloze mraky.

Na obloze jsou mraky.

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \quad (\text{modus ponens})$$

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad B$$

$$\frac{A}{A \vee B}$$

$$\frac{A(p) \quad \forall x : A(x) \Rightarrow B(x)}{B(p)}$$

$$\frac{A(p) \quad B(p)}{\exists x : A(x) \wedge B(x)}$$

Důkazy:

- přímý

$$A \Rightarrow B$$

Př. doházet Součet racionálních čísel je racionální číslo.

$$D: x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$$

rac. číslo je podíl celých čísel

$$\exists a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} : x_1 = \frac{a_1}{b_1}, x_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$$

$\mathbb{Z}$ uzavř. na sčít. a násobení

$x_1 + x_2$ je podíl celých čísel
podíl celých č. je rac. číslo

$$x_1 + x_2 \in \mathbb{Q}$$

- nepřímý

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

$$Př. \forall m \in \mathbb{N} : 2|m^2 \Rightarrow 2|m$$

$$2 \nmid m \Rightarrow 2 \nmid m^2$$

D: n se rozkládá na prvočinitele, není v něm 2
 n^2 .. má rozklad s 2nás. exponenty (oproti n) ...
... neobratně n .. $2 \nmid n^2$

- sporem

$$A \dots B$$

předpokládáme, že B neplatí ... dojdeme ke sporu ($C, \neg C$)
... B tedy platí

$$Př. \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

předp. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.. ex. $a, b \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{a}{b}$... $2b^2 = a^2$...
... $2|a^2$... $(2|a)$... ex. $a_2 \in \mathbb{N} : a = 2a_2$...
... $b^2 = 2a_2^2$... $2|b^2$... $(2|b)$... a, b soudělná

Pr. Existuje iracionální číslo.

D: 1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$... konstruktivní důkaz

2) spor: předpokládáme, pak $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, tj.
 $f(x) = x$ je bijekce $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$

minule: neexistuje bijekce $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$... existenční důkaz

Pr.: Ex. $x, y \notin \mathbb{Q}$ tak, že $x^y \in \mathbb{Q}$

D: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$... buď $\in \mathbb{Q}$... $x = y = \sqrt{2}$

nebo $\notin \mathbb{Q}$... $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$

nebo $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$

Matematická indukce

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0 \Rightarrow A(n) \\ (\in \mathbb{Z})$$

I. $A(n_0)$ (dokažeme)

II. $A(n) \Rightarrow A(n+1) \quad \forall n \geq n_0$

Pr.: $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1), \quad n \geq 1$

I. $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) \quad \checkmark$

II. $n \rightarrow n+1 : \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\frac{1}{2}n(n+1)} + (n+1) = \dots$

$$\frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)$$

uspořádání: - ostře ($<$): 1) právě 1 x možnost platí $x = y, x < y, y < x$ ($x \neq y$)

2) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$

$$x < y \Rightarrow x + k < y + k$$
$$x < y; x \geq 0 \Rightarrow x/k < y/k$$

... $x \leq y$ nebo $x = y$

D: $x \neq y$, (bez ijmy na obecnosti)
 BUVO $x < y$ $\begin{matrix} +x \\ \hline \end{matrix}$ $2x < x+y$ $\cdot \frac{1}{2}$ $x < \frac{x+y}{2}$
 $\begin{matrix} +y \\ \hline \end{matrix}$ $x+y < 2y$ $\cdot \frac{1}{2}$ $\frac{x+y}{2} < y$

2) $x, y \in \mathbb{R} \quad \dots \quad x < x' < y' \leq y \Rightarrow \text{ex. rac. mezi } x, y$

4)  неконечно

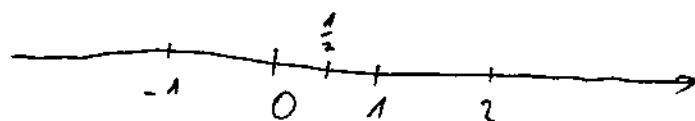
 $x < 0 \quad \therefore \text{кароче}$

$x \geq 0$... некарачные

$x \in \dots$ neblatné

absolutní hodnota: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

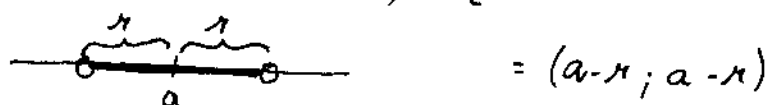
reálná osa



interval $(a < b)$: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ otevřený
 $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ uzavřený
 $\uparrow \uparrow$
 krajní body

$\langle a, b \rangle$ polootvřený
 $[a, b]$ polouzavřený

okolí $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $\pi > 0$: $U(a, \pi) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \pi\} =$



přestupové okolí $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $\pi > 0$ $P(a, \pi) = U(a, \pi) \setminus \{a\}$
 $= (a - \pi, a) \cup (a, a + \pi)$

neoblastní čísla: $-\infty, +\infty$, $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \mathbb{R}^*$... rozšířená množina reáln. čísel
 M.: $-\infty < x < +\infty$ ($x \in \mathbb{R}$)

$$|\pm\infty| = +\infty$$

$$x + \infty = \infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty$$

nedefinujeme $\infty - \infty$

$$x \cdot \infty = \infty \text{ pro } x > 0$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

nedefinujeme $0 \cdot \infty$

$$\frac{x}{\infty} = 0$$

nedefinujeme $\frac{\infty}{\infty}$

Definice: Číslo K je horní mez množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, pokud $M \leq K$
($x \leq K$ pro každé $x \in M$)

Číslo k je dolní mez ——— " ——— $k \in M$

Maximum $M \subseteq \mathbb{R}$ ($\max M$) je největší prvek M .

Minimum $M \subseteq \mathbb{R}$ ($\min M$) je nejmenší prvek M .

Shora (dola) omezená množina má horní (dolní) mez.

Supremum shora omez. M ($\sup M$) je nejmenší horní mez.

Infimum dola omez. M ($\inf M$) je největší dolní mez.

Př. $\max \langle 0, 1 \rangle = 1$

$\min \langle 0, 1 \rangle = 0$

$\sup \langle 0, 1 \rangle = \min \langle 1, +\infty \rangle = 1$

$\inf \langle 0, 1 \rangle = \max \langle -\infty, 0 \rangle = 0$

Pokud $\max M$ existuje, pak $\sup M = \max M$

Pokud $\min M$ existuje, pak $\inf M = \min M$

Př. $\max (0, 1)$ neex.

$\min (0, 1)$ neex.

$\sup (0, 1) = \min \langle 1, +\infty \rangle = 1$

$\inf (0, 1) = \max \langle -\infty, 0 \rangle = 0$

Věta: Každá neprázdná shora omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}$ má supremum.
———— " ——— dola ——— " ——— infimum.

M není shora omez. $\Rightarrow \sup M = +\infty$

— " — dola — " — $\Rightarrow \inf M = -\infty$

Pozn. $\sup \emptyset = -\infty$
 $\inf \emptyset = +\infty$

Princip snávených intervalů

Věta: Jestliže pro uzavřené intervaly I_m ($m \in \mathbb{N}$) platí
 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$, pak $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m \neq \emptyset$. Pokud se délky I_m
blíží 0, pak je tento průnik jednobodový.

D. $I_m = \langle a_m, b_m \rangle$

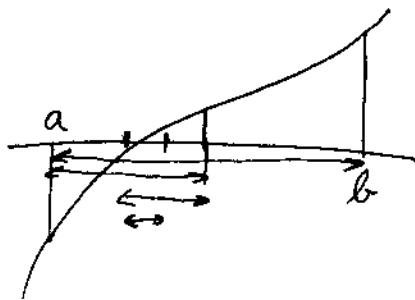
$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_1 \leq b_2$$

$$\sup \{a_m : m \in \mathbb{N}\} = a_0 \dots \leq b_2 \leq b_1$$

$$\inf \{b_m : m \in \mathbb{N}\} = b_0 \geq a_0$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{x \in \mathbb{R} : a_0 \leq x \leq b_0\} \ni \{a_0, b_0\}$$

Pr. bisekce



Pr. $I_m = (0, \frac{1}{m}) \dots (0, 1) \supseteq (0, \frac{1}{2}) \supseteq (0, \frac{1}{3}) \supseteq \dots$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \emptyset$$

Poslovnosti

Def. Poslovnost je uspořádaná množina $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ reálných čísel; a_m je m -tý člen (prvek)

$$(a_m)_{m=1}^{\infty} \quad | \quad \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : m \mapsto a_m$$

Př. 1) $\left(\frac{1}{m}\right)_{m=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$

2) $\left(1 + \frac{1}{m}\right)_{m=1}^{\infty} = \left(2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{10}{27}, \dots\right)$

3) $a_1 = 1, a_{m+1} = 2a_m$ (rekurentní)

$$(1, 2, 4, 8, \dots) = (2^{m-1})_{m=1}^{\infty}$$

$a_1 = a, a_{m+1} = q \cdot a_m$ (a, aq, aq², ...) = (aq^{m-1})_{m=1}[∞]
↑
koeficient
geometrická

$a_1 = a, a_{m+1} = a_m + d$ (a, a+d, a+2d, ...) = (a+(m-1)d)_{m=1}[∞]
↑
difference
aritmetická

5) $a_1 = a_2 = 1, a_{m+2} = a_{m+1} + a_m$ (Fibonacci)

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$$

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right]$$

operace a relace: +, -, nás. číslem, ≤, = člen po členu

Def: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je

$(2^n)_{n=1}^{\infty}$	<u>rostoucí</u>	— " —	$a_n < a_{n+1}$	— " —	} <u>ryze</u> <u>monotonní</u>
$(-n)_{n=1}^{\infty}$	<u>klesající</u>	— " —	$a_n > a_{n+1}$	— " —	
Fibonacciho	<u>neklesající</u>	— " —	$a_n \leq a_{n+1}$	— " —	} <u>monotonní</u>
	<u>nerostoucí</u>	— " —	$a_n \geq a_{n+1}$	— " —	

Pr. $((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ není monotonní

Def: Posloupnost je omezená (resp. středně omezená),
jestliže je omezená (středně nebo rovněž omezená) množina
jejích členů

Pr. $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ roste omezená, $(-n)_{n=1}^{\infty}$ středně omezená, $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ rovněž omezená,
 $((-2)^n)_{n=1}^{\infty}$ není omezená

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (n^2)_{n=1}^{\infty} = (1, 4, 9, 16, \dots)$$

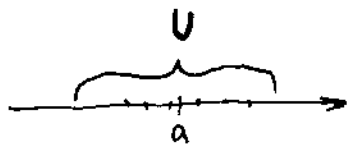
posl. indexů $(k_n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 6, \dots) = (2n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí

$$(a_{k_n})_{n=1}^{\infty} = ((2n)^2)_{n=1}^{\infty}$$

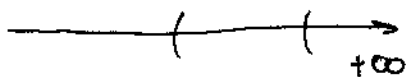
Def. Vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost

$(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přiroz. č.

Def: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}^*$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$),
jestliže pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak,
že pro každé přirozené $n > n_0$ je $a_n \in U$



$a_n \in U$ až na konečné mnoho členů
maximální na kon. mnoho členech



$$U(+\infty, \lambda) = (\lambda, \infty)$$

Př. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\varepsilon > 0, \quad U(0, \varepsilon) \ni a_n \quad |a_n - 0| < \varepsilon$$

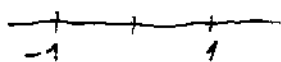
$$\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \doteq n_0$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad U(+\infty, \lambda) \ni a_n, \quad \lambda < a_n, \quad \lambda < 2^n$$

pro $\lambda \leq 0$ platí $\forall n$; $\lambda > 0 \quad n > \log_2 \lambda \doteq n_0$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ neex.



$a \in \mathbb{R}, \quad U(a, \frac{1}{2})$ má délku 1,
neobsahuje $\{-1, 1\}$, ∞ členů
 $a_n \notin U(a, \frac{1}{2})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a =$$

$+\infty$	$a > 0$
1	$a = 0$
0	$a < 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n =$$

$+\infty$	$a > 1$
1	$a = 1$
0	$a \in (-1, 1)$
neex.	$a \leq -1$

Věta Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, pak

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \text{ (pokud } b \neq 0 \text{)}$$

} pokud je výraz
na pravé straně
definován

není def.: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$

Pr. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = \underline{\underline{0}}$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2 + 3n + 4} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4^n}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{4}{3})^n}{(\frac{2}{3})^n + 1} = \frac{1 - \infty}{0 + 1} = \underline{\underline{-\infty}}$$

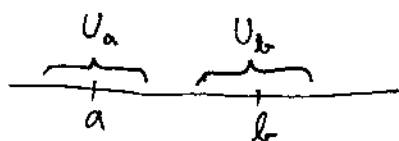
$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \underline{\underline{0}}$$

Věta (o jednoznačnosti) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

D.: 1) nemá l. ✓

2) má limitu a ; $b \neq a$,



ex. okolí U_a, U_b disjunktní:

$a_n \in U_a$ až na konečně mnoho

$a_n \in U_b$ jen pro konečně

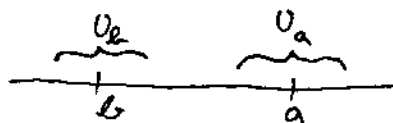
b není limita

Věta Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ a necht

$a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (až na konečné mnoho).

Pak $a \leq b$.

D.: spor: $a > b$



$a_n \in U_a$ až na konečné mnoho, $b_m \in U_b$ až na konečné mnoho, } zároveň až na kon. mnoho

$b_m < a_n$ až na kon. mnoho

spor

Př.

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

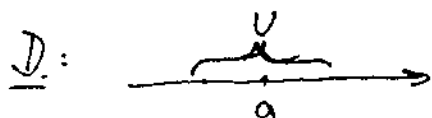
$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

$$0 \rightarrow 0$$

Věta (o zovření): Necht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a necht

$a_n \leq c_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ (až na kon. mnoho).

Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

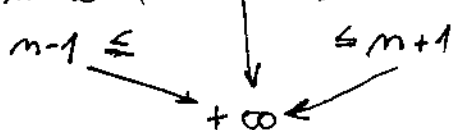


$U \dots a_n \in U$ až na kon. mnoho } zároveň až na kon. $b_m \in U$ až na kon. mnoho } $c_n \in \langle a_n, b_m \rangle \subseteq U$

Př.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n + (-1)^n) = +\infty$$

$$+\infty + omezená = +\infty$$



Věta (Bolzanova - Cauchijovo kritérium konvergence):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $m, n > n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Př.: $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ nekonverguje

Věta: Neklesající posloupnost má limitu (rovnou supremu).
Nerostoucí ————— " ————— (— " — infimu)

D. (obrátekem) $\bigcup_{\exists a_m \Delta}$

Př.: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}$ ex. vlastní, $= e \approx 2,718...$ Eulerovo číslo

$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_n$ je klesající ... $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$

má vlastní limitu

$$\begin{cases} (1+x)^k > 1+kx \\ x > 0, k > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} &> \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \\ \frac{(n+1)^{2n+4}}{n^{n+2}(n+2)^{n+2}} &> \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}$$

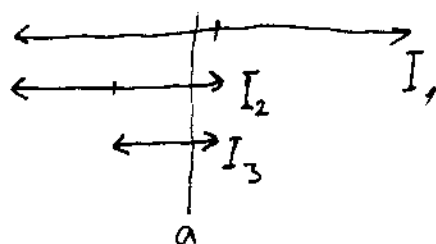
Def.: Bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnohá členy a_n .
limita je hromadný bod

Př.: $(-1)^n_{n=1}^{\infty}$ $\frac{+}{-1} \quad \frac{+}{1}$ kr. body $-1, 1$

hromadný bod je limitou vybrané posloupnosti

Věta: Každá posloupnost má alespoň 1. hr. bod.

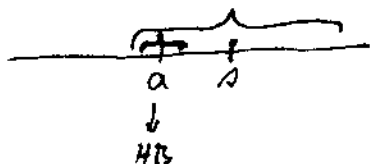
D.: musí shora omez. ... $+\infty$
 . zdola omez. ... $-\infty$
 omezená



vždy alespoň v jedné polovině intervalu nekonečně mnoho prvků

$$\cap I_n = \{a\}, a \text{ je hr. bod}$$

Supremum a infimum množiny hr. bodů je hr. bod.



$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$	(limes superior)	$(-1)^n$
$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$	(limes inferior)	1
		-1

Věta: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu právě tehdy, když existuje jediný její hromadný bod;
 každá vybraná posloupnost má stejnou limitu;

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Pr. $(0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots)$

$$(\sin n)_{n=1}^{\infty} \text{ h.b. } \langle -1, 1 \rangle$$

Funkce

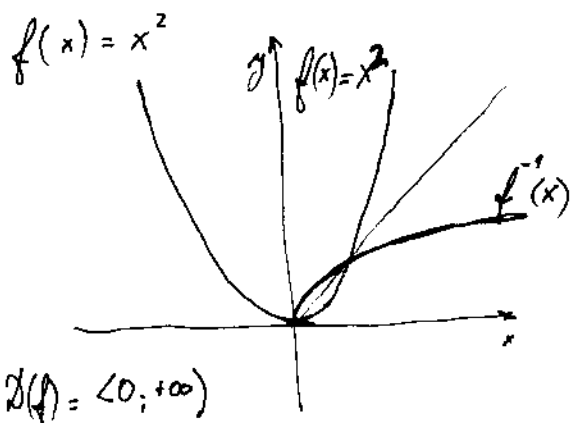
sobozrení číselného čí. mn.

reálná fce reálné proměnné

$$x \mapsto f(x) \quad \dots \text{ graf } f \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

Pr. $f(x) = \frac{1}{x-5} \quad \dots \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{5\} \quad \text{def. obor}$

f^{-1} existuje pro prostou f

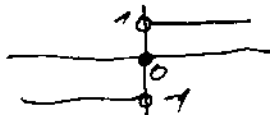


Def: Funkce f je omezená (resp. zdola nebo shora) na $A \subseteq \mathcal{D}(f)$,
je-li omezená (resp. zdola či shora) množina

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

Pr. 1) $f(x) = x^2 \quad \dots \text{omezená zdola}$
 $\mathcal{R}(f) = \langle 0; \infty \rangle$

2) $f(x) = \text{sign } x \quad \dots \text{omezená}$



3) $f(x) = x^3 \quad \text{není zdola ani shora omez}$
 $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$

Def: Funkce f je

- rostoucí, je-li $f(x) < f(y)$ pro všechna $x, y \in D(f), x < y$
 - klesající — " — $f(x) > f(y)$ — " —
 - neklesající — " — $f(x) \leq f(y)$ — " —
 - nerostoucí — " — $f(x) \geq f(y)$ — " —
- } mono-
tonní

($A \subseteq D(f) \dots$ monotónní „na A “)

Věta: Rostoucí (klesající) funkce má inverzní funkci,
ta je také rostoucí (klesající).

Def: Funkce f je

- sudá, jestliže $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D(f) \dots$ sym. grafu dle y
např. x^2
- lichá, — " — $f(-x) = -f(x)$ — " — $\dots$ sym. grafu dle počátku
např. x^3

Def: Funkce f je periodická s periodou $T > 0$, jestliže

$$f(x \pm T) = f(x) \text{ pro každé } x \in D(f)$$

Pr. $\sin x$

základní perioda (nejmenší)

operace:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x); \quad x \in D(f) \cap D(g)$$

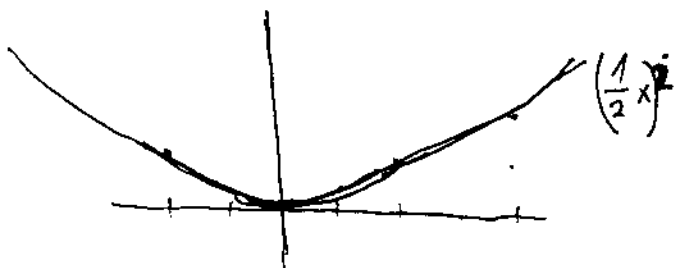
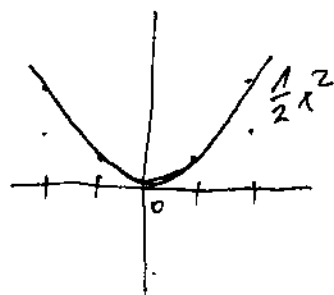
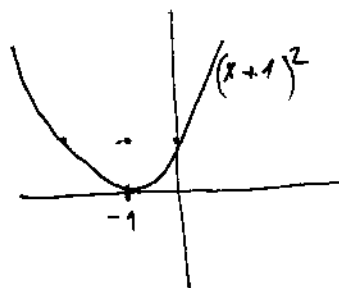
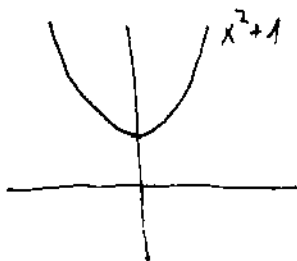
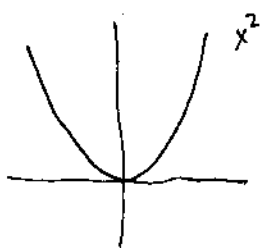
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D(f) \cap D(g) \cap \{x: g(x) \neq 0\}$$

Def: Necht' f, g jsou funkce, $D(f) \subseteq D(g)$, pak složení
funkcí g a f je

$$(g \circ f)(x) = \overset{\text{míra}}{g}(\overset{\text{míra}}{f}(x)) \quad \text{není komutativní}$$

Pr. $f(x) = 2x$
 $g(x) = x^2$

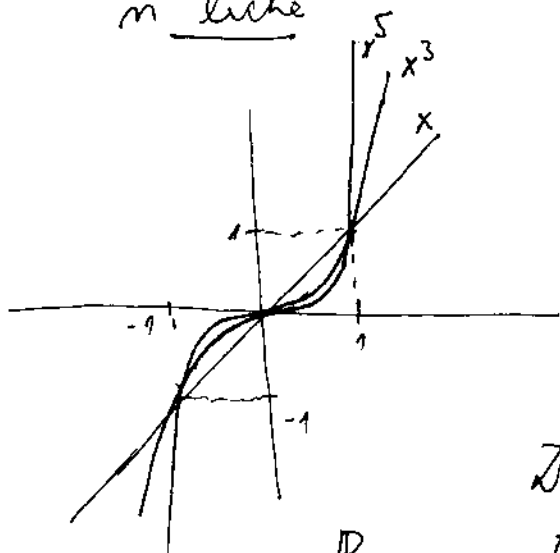
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 = (2x)^2 = 4x^2$$



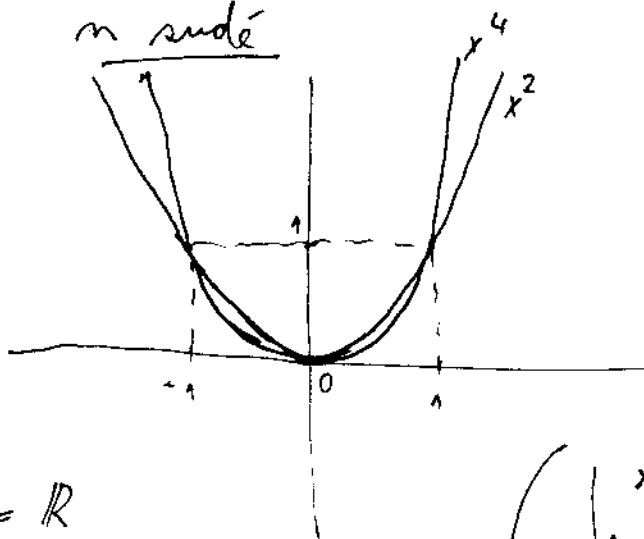
moening

$x^m, m \in \mathbb{N}$

m liché



m sudé



$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \dots \mathbb{R}(f) \dots (0; \infty)$$

neom.

rostoucí

lichá fce

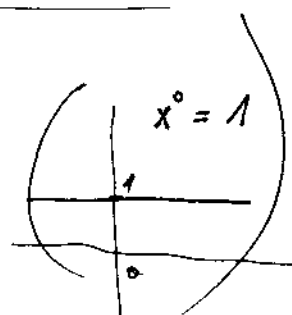
omez. sdola

klas. na $(-\infty; 0)$

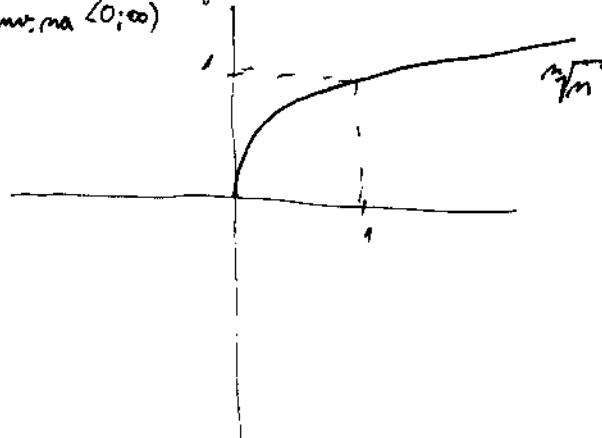
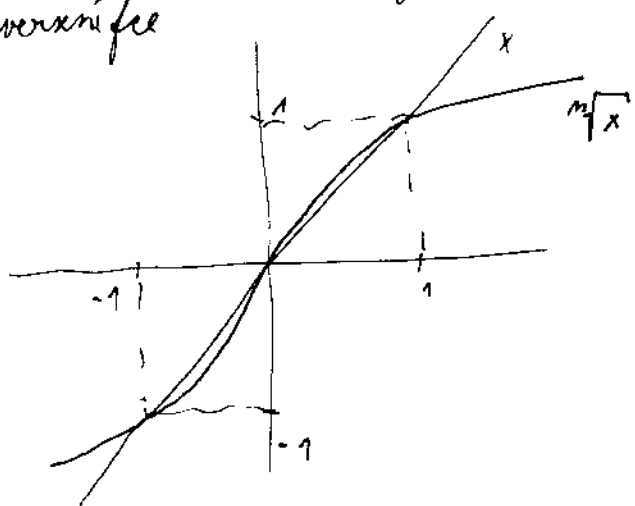
rost na $(0; \infty)$

sudá fce

inv. na $(0; \infty)$



inverzní fce

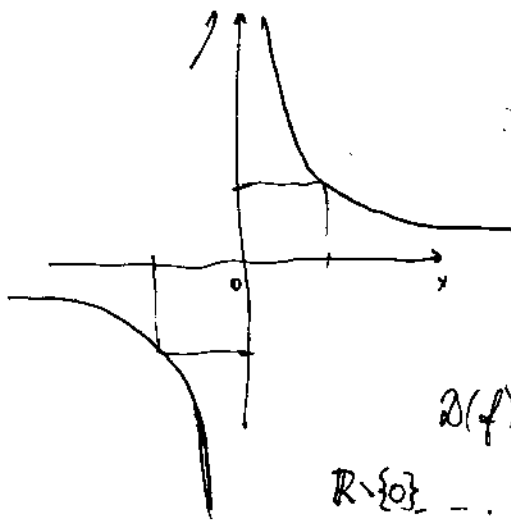


$$m \in \mathbb{Z}$$

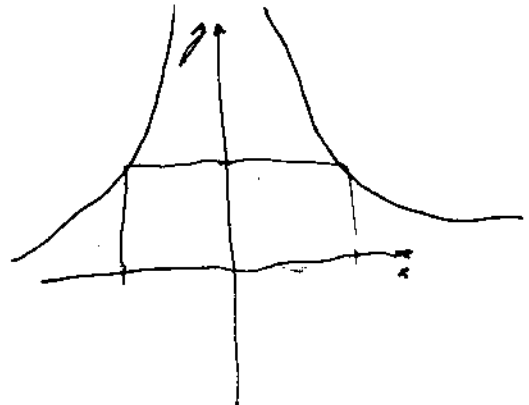
$$x^0 = 1$$

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

n liché



n sudé



$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \dots D(f) \dots (0; \infty)$$

není om.

sdola om.

kles. na

rost. na $(-\infty; 0)$

$(-\infty; 0)$

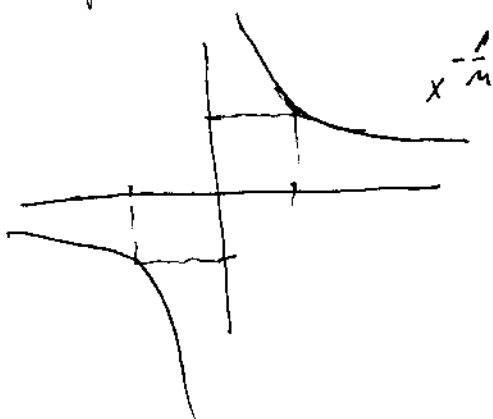
kles. na $(0; \infty)$

$(0; +\infty)$

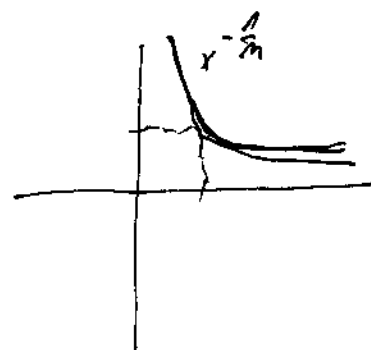
lichá fce

sudá fce

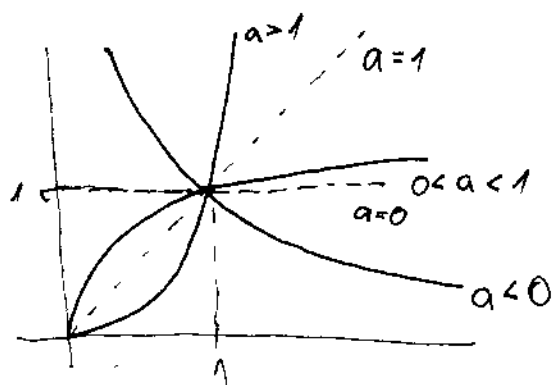
inverzní fce



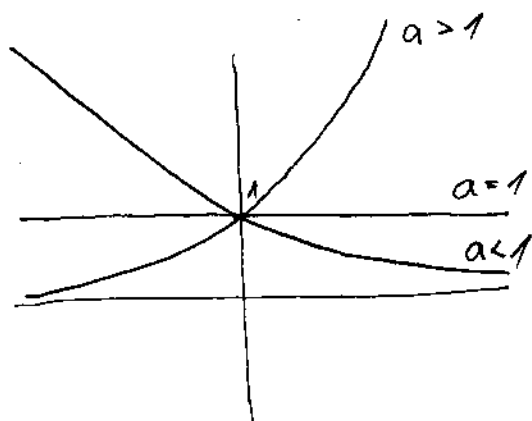
sudá
inv na $(0; +\infty)$



$$x^a = e^{a \ln x}$$



Exponenciālās funkcijas ar pakāpienu $a > 0$
 a^x (impliciti $e = 2,718...$)



$$D(f) = \mathbb{R}$$

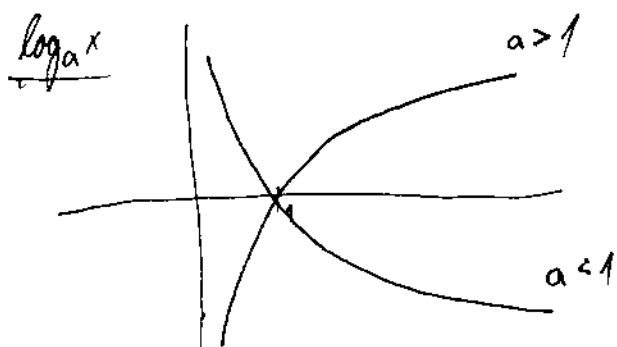
$$Q(f) = (0; \infty)$$

rostoņi pro $a > 1$

klešojīši pro $a < 1$

rodola om. (pro $a=1$ i šlora)

inv. pro $a \neq 1$



$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

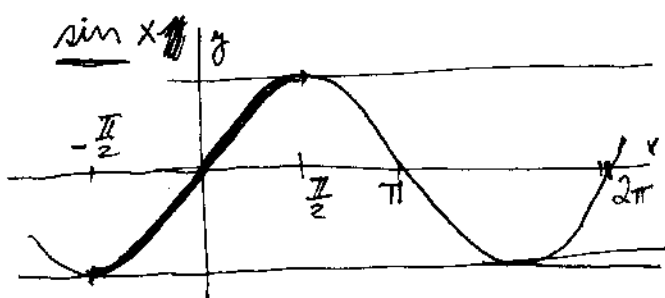
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^y = y \log_a x$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$a=10 \quad \dots \quad \log_a x = \log x$$

$$a=e \quad \dots \quad \log_e x = \ln x \quad (\text{přirozený log.})$$

Trigonometrické funkce



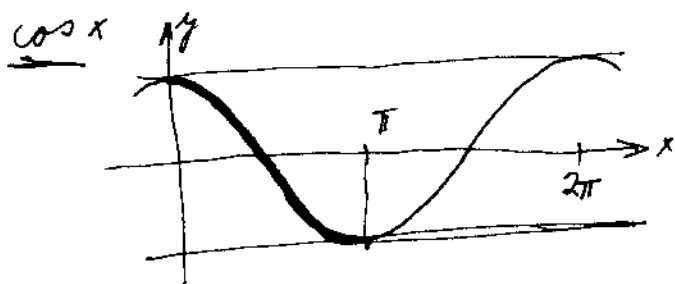
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$R(f) = \langle -1; 1 \rangle$$

$$\text{rostoucí } \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$\text{klesající } \langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$$

$$\text{perioda } 2\pi, \text{ lichá fce}$$



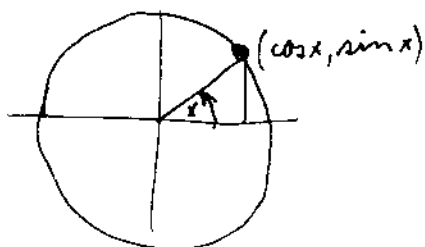
$$D(f) = \mathbb{R}, \quad R(f) = \langle -1; 1 \rangle$$

$$\text{perioda } 2\pi$$

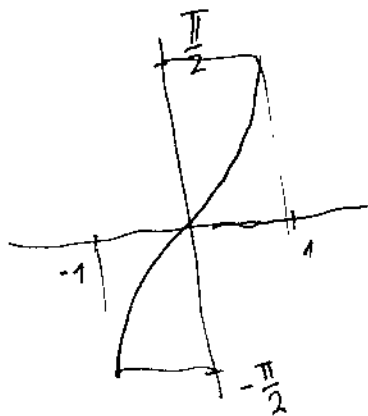
$$\text{rostoucí } \langle \pi; 2\pi \rangle$$

$$\text{klesající } \langle 0; \pi \rangle$$

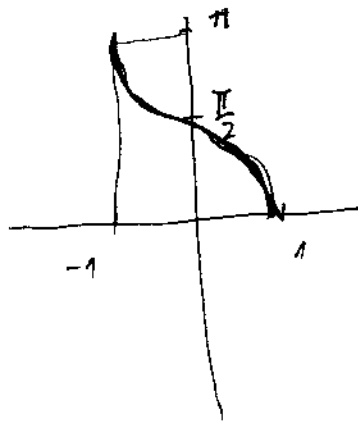
$$\text{sudá fce}$$



arcsin x



arccos x



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

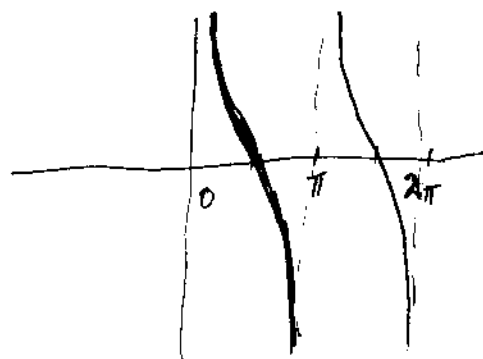
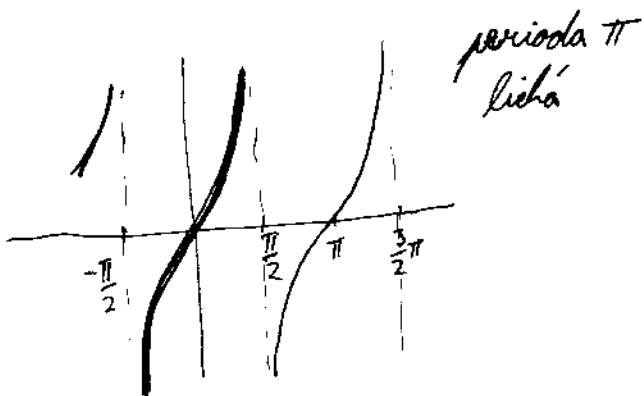
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

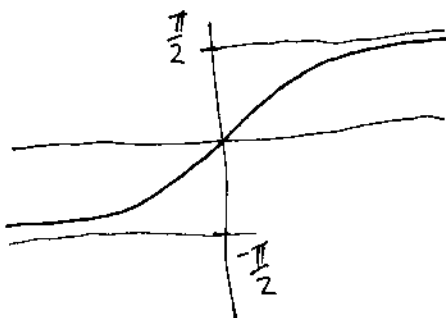
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

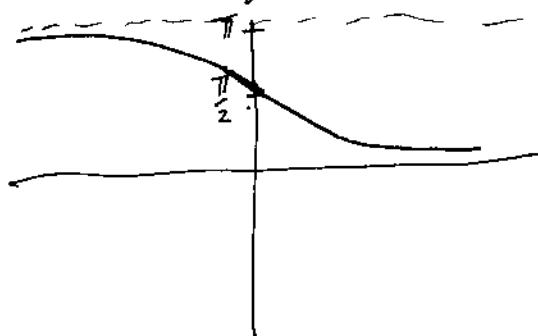
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



arctg



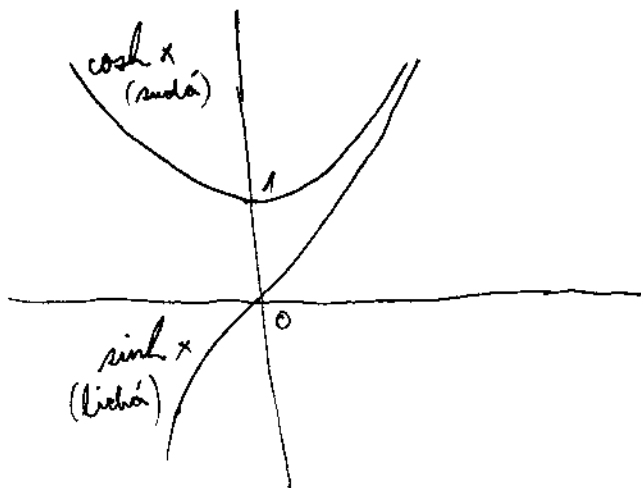
arccotg



Hyperbolické fce

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

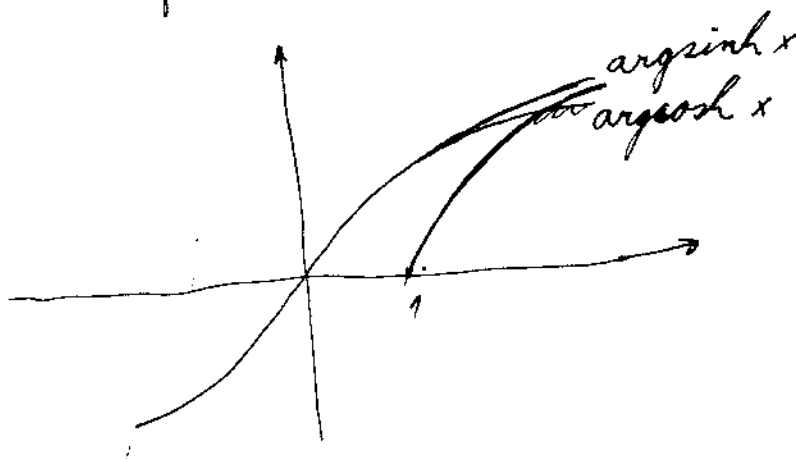
$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$



cosh
sudá
 $R(f) = \langle 1; \infty \rangle$

sinh
lichá
rostoucí

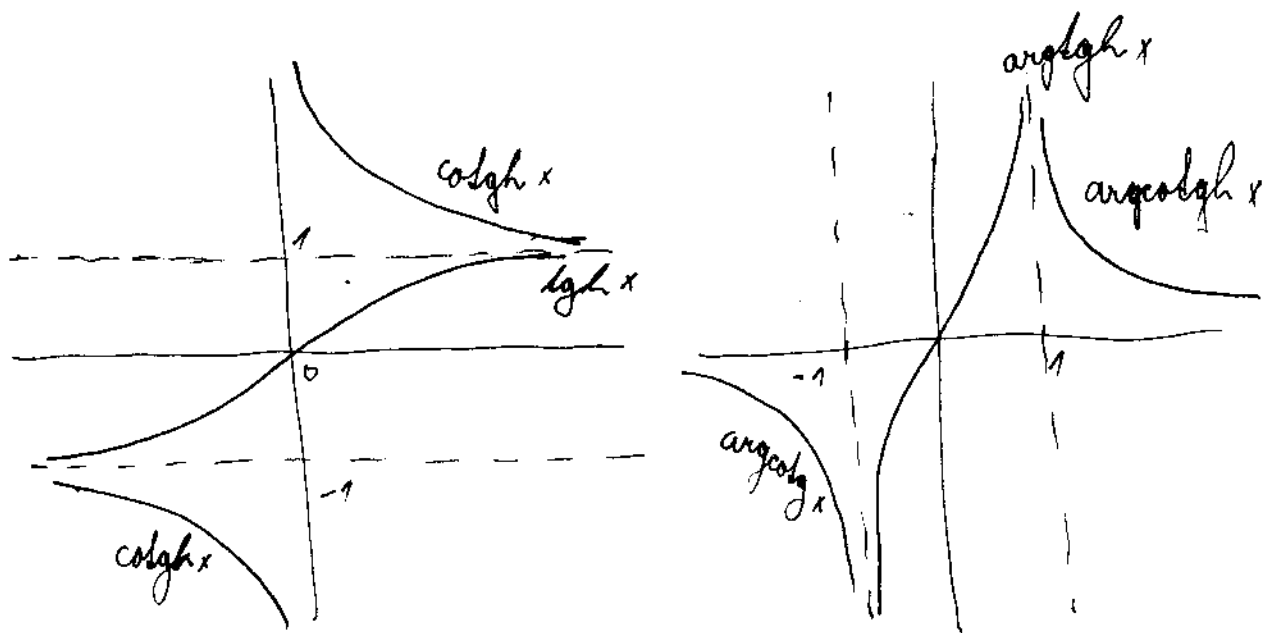
inverzní fce



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$



Limity fci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

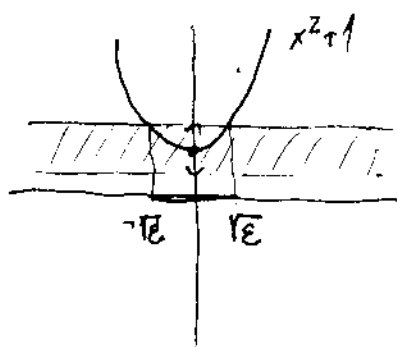


Def : Funkce f definovaná v prstencovém okolí $a \in \mathbb{R}^*$ má v a limitu $b \in \mathbb{R}^*$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$), pokud pro každé okolí U bodu b existuje prstencové okolí

V bodu a tak, že $f(V) \subseteq U$

jednostranná limita .. vlevo od a - limita vlevo $\lim_{x \rightarrow a^-}$
 - vpravo od a - limita vpravo $\lim_{x \rightarrow a^+}$

Pr $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1$



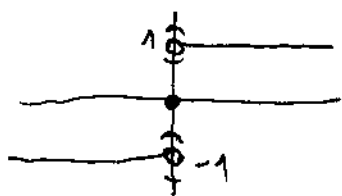
$$f(x) \in U, |f(x) - 1| < \epsilon$$

$$x^2 + 1 < 1 + \epsilon$$

$$x^2 < \epsilon$$

$$|x| < \sqrt{\epsilon}$$

Př: $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign} x$ *neexistuje*



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sign} x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sign} x = 1$$

Věta: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje právě tehdy, když existují obě.

jednostranné limity a ty jsou stejné

Věta: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ právě tehdy, když pro každou posloupnost

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \text{ je } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$$

Př: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

$$a_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0, f(a_n) = \sin \pi n = 0 \rightarrow 0$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \rightarrow 0, f(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \rightarrow 1$$

$\rightarrow$ *neexistuje*

Věta: Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu

Věta:
1) limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) je součet
(rozdílu, součin, podíl) limit, pokud je definován.

$$\text{Př: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-5} = \left| \frac{-\infty}{-\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{5}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

2) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ na prst. okolí a , pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Pr. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

3) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, g je omezená na prst. okolí a , pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$

Pr. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{omez}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\text{omez}} = 0$

4) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \{\pm\infty\}$, g omezená na prst. okolí a , pak $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \pm\infty$

Pr. $\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{(x)}_{+\infty} + \underbrace{\sin x}_{\text{omez}} = +\infty$

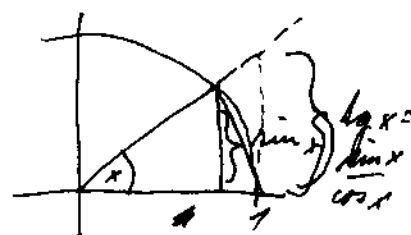
5) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, $f \leq h \leq g$ na prst. okolí a , pak $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$

6) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, $f \leq g$ na prst. okolí a , pak $b \leq c$

Pr. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{2} &\leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{2 \cos x} \quad | \cdot \frac{2}{\sin x} \\ 1 &\leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \\ 1 &\leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos x \end{aligned}$$

↓
1



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Věta: Je-li

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ a } f(x) \neq b \text{ na prst. okolí } a$$

$$2) \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c,$$

$$\text{pak } \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$$

Př: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0, & \text{jinak} \\ 1, & x = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

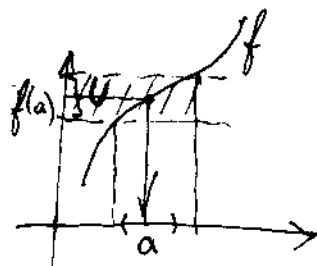
nemá v 0 limitu

Def: Funkce f je spojitá v $a \in D(f)$, pokud pro každé okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f(V \cap D(f)) \subseteq U$.

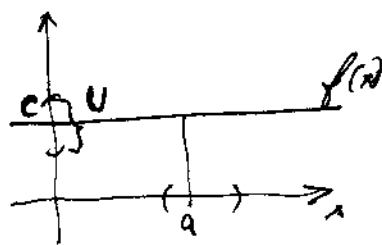
$f^{-1}(U)$ obsahuje okolí a (vněmci $D(f)$)

spojitá na $A \subseteq D(f)$... v každém bodě A

spojitá .. na $D(f)$

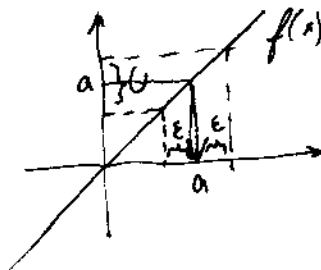


Pr 1) $f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R})$
 $f^{-1}(U) = \mathbb{R} \supseteq U(a, 1)$
 $\rightarrow$ spojitá



2) $f(x) = x$

$\varepsilon > 0: U = U(a, \varepsilon),$
 $f^{-1}(U) = U(a, \varepsilon) = V$
 $\rightarrow$ spojitá



3) $\text{sign } x$ není spoj. v 0

$f^{-1}(U(0; \frac{1}{2})) = \{0\}$.. neobs. okolí 0

4) Dirichletova fce $d(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

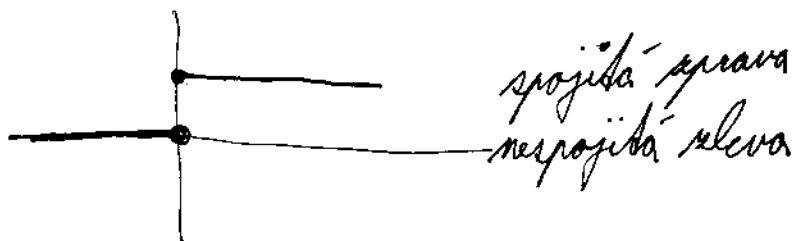
$U(f(a), \frac{1}{2}) = \begin{cases} \mathbb{Q} \\ \mathbb{R}, \mathbb{Q} \end{cases}$ neobs. okolí a

$\rightarrow$ nespojitá na $\mathbb{R}$

Věta: Je-li f definovaná v prst. okolí a , pak je v a spojitá právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

spojitost sprava, vleva

Pr $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$



spojitá sprava
nespojita vleva

nespojitosť

1) odstraniteľná

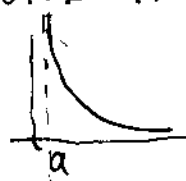
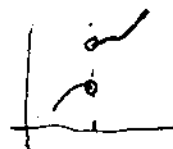
$$\frac{x-1}{x^2-1} \sim \frac{1}{x+1}$$



2) skok .. vlastné jednosmerné limity, rôzne

3) asymptotická - ex. nevladní jednosm. lim.

napr. $\frac{1}{x}$ v 0



Věta: Necht f, g jsou spojité v a , pak

1) $f+g, f-g, f \cdot g, |f|$ jsou spojité v a

2) je-li $g(a) \neq 0$, pak $\frac{f}{g}$ je spojitá v a

3) existuje okolí bodu a , na kterém je f omezená

4) je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, pak $f > 0$ na okolí a

Věta je-li f spojitá v a , ~~je~~ g spojitá v $f(a)$, pak $(g \circ f)$ je spojitá v a

Metavěta: Elementární funkce jsou spojité.

Věta: Spojitá funkce nabývá na uzavřeném intervalu maxima a minima.

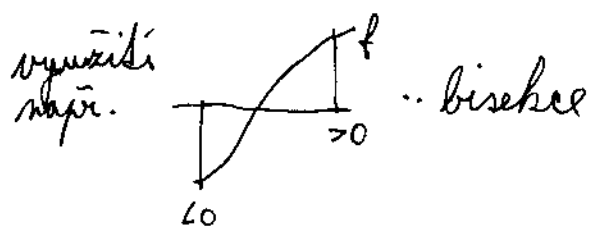
D. $\sup R(f) = s$, k supremu se můžeme „blížit“ $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$
 $I = I_1$ rozptílíme, z jedné půlce ved. $x_n \in I_2$

$$\dots \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$$

$$x_n \text{ vybereme } x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$$

$$f \text{ spojitá: } f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) = s$$

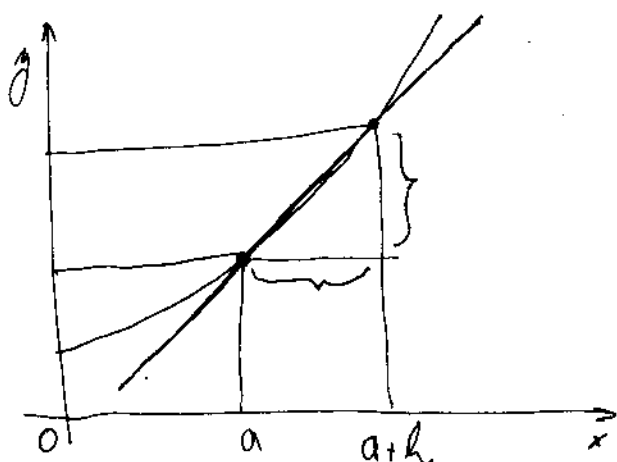
Věta: Nabyvá-li spojité fce na intervalu hodnot a, b ,
pak nabyvá i všech hodnot mezi nimi



Důsledek: Pro spojitou fci je obrazem intervalu interval.
(uvazujeme uzavřený)

Věta: Spojitá fce na intervalu je prostá právě tehdy,
když je ryze monotonní

Derivace



Def: Derivace funkce f v bodě a je $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
 $\left(= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$

derivace prava ... $\lim_{h \rightarrow 0^+} \dots f'_+(a)$

leva $\lim_{h \rightarrow 0^-} \dots f'_-(a)$

Pr $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f) = (0; \infty)$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \left| \frac{1}{0^+} \right| = +\infty$$

Def: Funkce má derivaci na intervalu I

... má derivaci v každém v každém vnitřním bodě I,
v případných hr. bodech I přisl. jednostr. derivace

$a \mapsto f(a) \mapsto f'(a)$ na I... nová fce... derivace f

$' : f \mapsto f'$ zobrazení na mn. funkcí

Věta: 1) $(c)' = 0$

$$f(x) = c, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

2) $(x^m)' = m \cdot x^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, na $\mathbb{R}$
 $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $m \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$$(x^m)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^m + m x^{m-1} h + \dots + h^m - x^m}{h} =$$

$$= m x^{m-1}$$

3) $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} =$$

$$= e^x$$

4) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$

$(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\cos(x + \frac{h}{2})}_{\rightarrow \cos x} \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\rightarrow 1} = \cos x$$

Pr. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$f'_+(0) = +\infty \xleftarrow{x \rightarrow 0^+} \text{pokud } f \text{ spojitá (v } a \text{)}$$

Věta: Má-li f v bodě a vlastní derivaci, pak je v bodě a spojitá.

2: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \cdot (x - a)}_{\text{plasní } \vec{0} \rightarrow 0}$

Pr. 1) $\text{sign}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sign } h}{h} = \left| \frac{1}{0^+} \right| = +\infty$

ex. fce $\neq f'(a)$, nespojitá v a

2) ex. spoj. fce, která nemá der.

$$f(x) = |x|, \quad f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1$$

$f'(0)$ neex.

3) $f(x) = \sqrt{x} \dots$ spojitá, nevl. der

Věta pou-li, f, g fce s vlastní derivací v a , pak

$$(1) (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

$$(2) (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$(3) \left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \quad \text{pro } g(a) \neq 0$$

Dů: 1)
$$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \pm g'(a)$$

2)
$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \underbrace{g(x)}_{\downarrow g(a)} + \underbrace{f(a)}_{\downarrow f(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

3)
$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \frac{1}{g(a) \cdot g(x)} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{g^2(a)} [f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)]$$

Pr. 1) $(3x^2 + 7x - 3)' = 6x + 7 \quad / \quad = (3x^2)' + (7x)' - (3)' =$
 $= (3)'x^2 + 3(x^2)' \dots$

2) $(\lg x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
 $x \in \mathcal{D}(\lg x)$

Pozn. 1) $(f_1 + \dots + f_n)' = f_1' + \dots + f_n'$

2) $(f_1 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot (f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = \dots$
 (f bude součet součinů, ve kterých vždy 1 derivována)

3) $(cf)' = c \cdot f', \quad c \in \mathbb{R}$

$(f+g)' = f' + g'$ } je lineární zobrazení

Věta: Nechť f má v a vlastní der. v a , g má vlastní derivaci v $f(a)=b$. Pak $h = g \circ f$ má vl. der. v a ,
 $h'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$

Důk.: $s(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases} \}$ spojitá v a

$t(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} & y \neq b \\ g'(b) & y = b \end{cases} \}$ spojitá v b

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{g(\overbrace{f(x)}^y) - g(\overbrace{f(a)}^b)}{x-a} = \frac{t(y) \cdot (y-b)}{x-a} = \frac{t(y) \cdot s(x) \cdot (x-a)}{x-a}$$

$\begin{matrix} x \rightarrow a \\ f(x) \rightarrow f(a) \\ y \rightarrow b \end{matrix} \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\quad \quad \quad g'(b) \cdot f'(a)$

Pr. 1) $(\sin x^2)^2 = 2x \cos x^2$

2) $(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}(-1)) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

První. 1) $\frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{df}{dx} \quad \left(\frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} \right)$

2) $(h \circ g \circ f)' = h' \cdot g' \cdot f'$

$(\sin e^{x^3})' = \cos e^{x^3} \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2$

$$f(x) = y \quad \dots \quad x = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad |'$$

$$(f^{-1}(y))' \cdot f'(x) = 1$$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

Věta: Necht' fce f je spojitá a ryze monotonní na otevřeném intervalu I , $a \in I$ takový, že $f'(a)$ ex. a je nenulová. Pak f^{-1} má v bodě $f(a)$ derivaci, rovná se $\frac{1}{f'(a)}$

D: ~~$f(x) = y$~~ , $f(a) = b$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} =$$

$$= \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

$y \rightarrow b$
 $(f^{-1}(y))' \quad x \rightarrow a$

$\downarrow$
 $\frac{1}{f'(a)}$

Pr 1) $f(x) = \sqrt{x} = y \quad \dots \quad f^{-1}(y) = y^2 \quad \dots$ na $(0; +\infty)$ rostoucí, $\text{der. } 2y \neq 0$

$$f'_x = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$2) \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} = \frac{1}{e^y} = \boxed{\frac{1}{x}}, \quad x \in (0; \infty)$$

$$x = e^y \in \mathbb{R} \text{ roztocí } (e^y)' = e^y \neq 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-1; 1) \\ x \neq \pm 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{---} +\infty \\ \text{---} -\infty \end{array} \quad \dots x \in \langle -1; 1 \rangle$$

$$\text{Př. 1) } f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \quad \underline{(a^x)'} = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = \underline{a^x \cdot \ln a}$$

$$2) \underline{(x^a)'} = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = \underline{a \cdot x^{a-1}}$$

Def Derivace n -tého řádu f (n -tá derivace)

$$f^{(0)} = f$$

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

znáčení	řád 1:	f'	$f^{(1)}$	f^I	$\frac{df}{dx}$
	2:	f''	$f^{(2)}$	f^{II}	$\frac{d^2 f}{dx^2}$
	3:	f'''	$f^{(3)}$	f^{III}	$\frac{d^3 f}{dx^3}$
		$\vdots$		f^{IV}	$\vdots$

Pr. $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad x \neq 0$

$$f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2) \dots (-n) x^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Pozn. 1) $(f_1 + \dots + f_n)^{(n)} = f_1^{(n)} + \dots + f_n^{(n)}$

2) $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

Leibnizova formula

$$(f \cdot g)^{(0)} = fg$$

$$(f \cdot g)^{(1)} = f'g + fg'$$

$$(f \cdot g)^{(2)} = f''g + 2f'g' + fg''$$

Věta (Rolle) : Necht' pro f platí

1) $f(a) = f(b)$

2) f je spojitá na $\langle a, b \rangle$

3) f' ex. v (a, b)

Pak ex. bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$

D. f klesá ✓

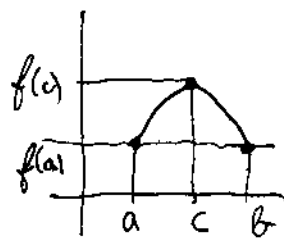
f je uvnitř $> f(a)$ (opačně podobně)

f nabývá max. v $c \in (a, b)$

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$

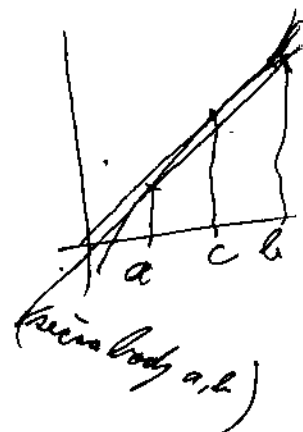
$$\left. \begin{matrix} \leq 0 \\ \geq 0 \end{matrix} \right\} = 0$$



Věta (Lagrange, o průměrné fce)

Nechť f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, má derivaci v (a, b) ,
pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

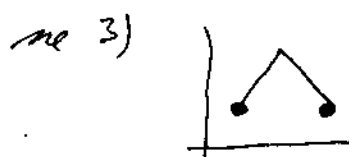
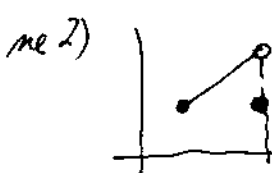
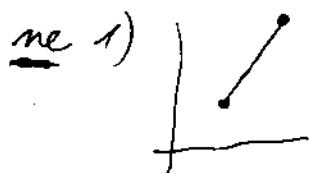
$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$



D: $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$

$$\exists c \in (a, b) : 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Tvrzení: Nechť f je spojitá v bodě a zprava
a nechť existuje $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$.

$$\text{Pak } f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

D: $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(c) \cdot h}{h}$

$\begin{matrix} \nearrow c \in (a, a+h) \\ \downarrow \\ a^+ \end{matrix}$

Pr $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty = (\sqrt{x})'(0^+)$

Lemma: Necht f, g jsou spojité na (a, b) , mají derivace na (a, b) a $g' \neq 0$ na (a, b) .

Pak ex. $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

D: $h(x) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x)$

$$h(a) = f(b)g'(a) - g(b)f'(a) = h(b)$$

$$\exists c \in (a, b) : 0 = h'(c) = (f(b)-f(a))g''(c) - (g(b)-g(a))f''(c)$$

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Necht funkce f, g mají v pravém okolí bodu a vlastní derivace, $g' \neq 0$ a necht platí

$$(1) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \text{ nebo } \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \in \{\pm\infty\}$$

$$(2) \text{ a. } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Pak } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = b$$

kdy použít na $\left|\frac{0}{0}\right|, \left|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right|$

D: $x > a$ (blízko)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \rightarrow b$$

$\downarrow$
 a^+

Ex

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \left| \frac{\text{neex.}}{+\infty} \right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{1} \text{ neex.}$$
$$= \left| \frac{0}{+\infty} \right| = \underline{\underline{0}}$$

$$0 \cdot \infty \rightarrow \frac{\infty}{\frac{1}{0}}, \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left| \frac{-\infty}{+\infty} \right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = \underline{\underline{0}}$$

$$\infty^0, 0^0, 1^\infty$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$
$$= \left| \frac{0}{0} \right| \stackrel{L'H}{=} e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^1 = \underline{\underline{e}}$$

Věta (o Taylorově polynomu):

Nechť f má na $\langle a, x \rangle$ spojité derivace do řádu $n \geq 0$,
nechť existuje $f^{(n+1)}$ na (a, x) .

Pak ex. $c \in (a, x)$ tak, že platí:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{Taylorův polynom } f \text{ v bodě } a (T_n)} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

zbytek v
Lagrangeově
tvary

Pozn: 1) $\langle x, a \rangle$

2) $n=0$ $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$... Lagrange

3) $x-a=h \rightarrow f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$

$$T_n(a) = f(a)$$

$$T_n'(a) = f'(a)$$

$$T_n''(a) = f''(a)$$

$\vdots$

$$T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Dle x pevně $f(x) = T_n(x) + \underbrace{M(x-a)^{n+1}}_{\text{zbytek}}$

~~g(x) = f(x) - T_n(x) - M(x-a)^{n+1}~~
 $g(t) = f(t) - T_n(t) - M(t-a)^{n+1}$
 $g(x) = 0 \quad g(a) = 0$

ex. $c_1 \in (a, x) : g'(c_1) = 0 \quad g'(a) = 0$

ex. $c_2 \in (a, c_1) : g''(c_2) = 0$

$c_m \in (a, x) : g^{(m)}(c_m) = 0 \quad g^{(m)}(a) = 0$

ex. $c \in (a, x) : g^{(n+1)}(c) = 0$

$$f^{(n+1)}(c) = 0 - M(n+1)! = 0$$

$$M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Pr $\sqrt{16,06}$

$$f(x) = \sqrt{x}, a = 16, (h = 0,06)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''' = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

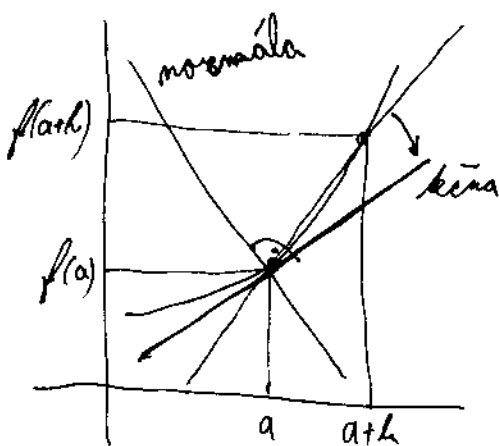
$$f(x) \approx T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 =$$

$$= 4 + \frac{1}{8}(x-a) - \frac{1}{512}(x-a)^2$$

$$\sqrt{16,06} \approx 4 + \frac{1}{8} \cdot 0,06 - \frac{1}{512} \cdot 0,06^2 \approx 4,007492968$$

a odhadneme chybu

$$\left| \frac{f'''(c)}{3!} (x-a)^3 \right| = \left| \frac{1}{16\sqrt{c^5}} \cdot 0,06^3 \right| \leq \frac{0,06^3}{16\sqrt{16^5}} = 0,00000013...$$



$f'(a)$... směrnice tečny grafu f
v $[a, f(a)]$

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) = T_1(x)$$

směrový vektor $(1, f'(a))$

= normalový vektor normály

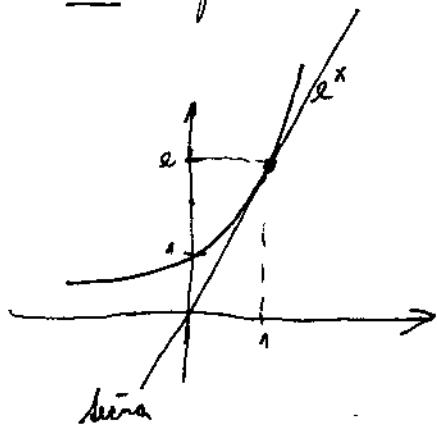
$\Rightarrow$ rovnice normály $1 \cdot x + f'(a)y = \text{konst}$ $[a, f(a)]$

$$= a + f'(a) \cdot f(a)$$

$$y = \frac{-1}{f'(a)} x + \text{konst}$$

$\leftarrow$ směrnice normály

Př. $f(x) = e^x$ $[1; ?]$
 $\|x' = e$



$$f'(x) = e^x$$

$$f'(1) = e$$

tečna: $y = f(1) + f'(1)(x-1)$
 $= e + e(x-1)$

$$\underline{y = ex}$$

normála

směrnice $\frac{-1}{f'(1)} = -\frac{1}{e}$

$$y = f(1) - \frac{1}{e}(x-1) = \underline{e - \frac{1}{e}(x-1)}$$

Průběh funkce

Věta: Necht' f je spojitá na intervalu I , která má v každém vnitřním bodu I derivaci.

Pak platí:

1) je-li $f' > 0$ vnitřně I , pak f je rostoucí na I .

2) $<$ klesající

3) $=$ neklesající

4) $\leq$ nerostoucí $\stackrel{x>0}{\Rightarrow}$

d. $x < y$ $x \in I \dots \text{ex. } c \in (x, y): f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y-x)$

Pozn. 1) $f' = 0 \Rightarrow f$ je konstantní (na intervalu!)

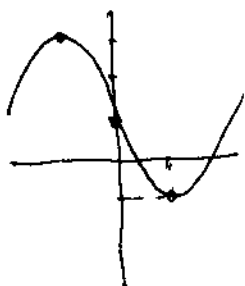
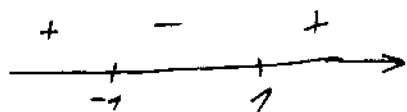
2) $f' = g'$ na intervalu $\Rightarrow$ liší se o konstantu

Pr $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

f rostoucí $(-\infty; -1)$
 $(1; \infty)$

klesající $(-1; 1)$



Def: Funkce f má v bodě a

ostré lokální maximum, je-li $f(x) < f(a)$ na pravostrani a ,

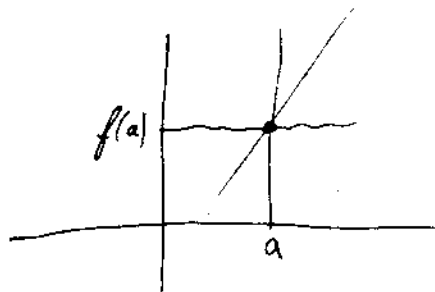
— " — minimum, je-li $f(x) > f(a)$ — " —

neostré - $=, \approx$, ostré lok. extrém

Twicken: je-li $f'(a) > 0$, pak existuje okolí U bodu a

tak, že pro každé $x, y \in U$, $x < a < y$,

je $f(x) < f(a) < f(y)$

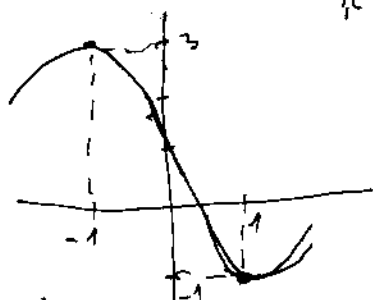


D: $0 < f'(a) = \lim_{y \rightarrow a+} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \rightarrow f(y) > f(a)$ na pravoustrani

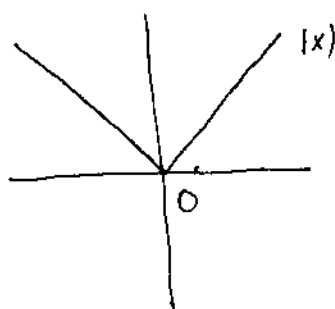
Věta: Má-li f v bodě a lokální extrém,
pak ~~pro~~ buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$
↑
stacionární bod

D: $f'(a) > 0$ rostoucí v a
 $f'(a) < 0$ klesající v a } není lokální extrém

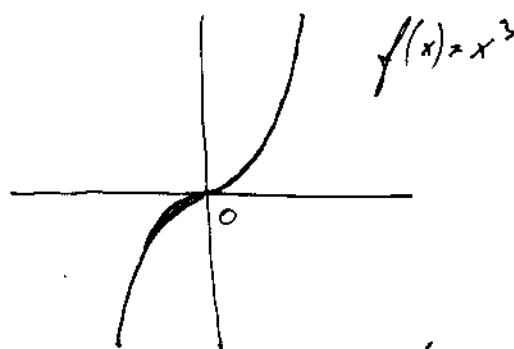
Př.: $f(x) = x^3 - 3x + 1$
 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \dots x_{pr} = \pm 1 \dots$ stac. body



Př.



o. lok. min. v 0,
 $f'(0)$ neex.



nemá lok. extrém
 $f'(0) = 0$

Věta: Nechť $f'(a) = 0$

- 1) Je-li $f''(a) > 0$, pak f má v a ostré lok. minimum
- 2) Je-li $f''(a) < 0$, —————||————— maximum

D: 1) f' rostoucí v a , $f' < 0$ vlevo, $f' > 0$ vpravo ...
a prostě tak

Ex. 1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$f'(x) = 6x$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \quad \text{o.l. max}$$

$$f''(1) = 6 > 0 \quad \text{a.l. min.}$$

$$2) f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \quad \text{st. bad } 0$$

$$f''(x) = 6x, \quad f''(0) = 0$$

ment exhum

3) $f(x) = x^4$

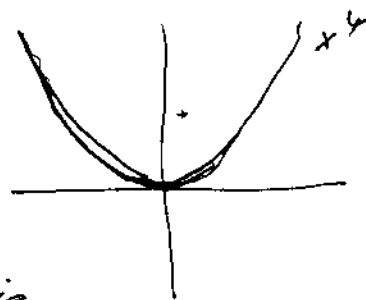
$$f'(x) = 4x^3 = 0, \text{ at } x=0$$

$$f''(x) = 12x^2, \quad f''(0) = 0$$

a price sam l. extrem je

$$f'''(x) = 24x, \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 24, \quad f^{(4)}(0) \neq 24$$



Pravila: Je-li $f'(a) = \dots = f^{(2m-1)}(a) = 0$, $f^{(2m)}(a) > 0$, pak a j. o. l. min
is. $\dots \parallel \dots < \dots$ va j. o. l. max

no. _____ || _____ < 1... va po l. nar

Twicken: Exotická funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima (minima) v krajním bodě intervalu nebo ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde nemá derivaci

Pr: $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in \langle -2; 1 \rangle$

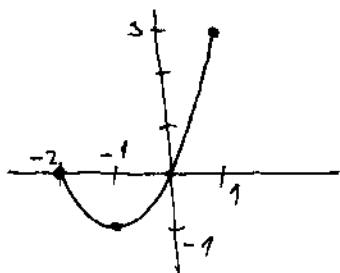
$f(-2) = 0$

$f(1) = 3 = \max f$ $\uparrow$
 krajní body

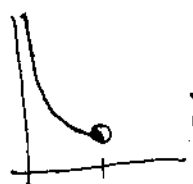
$f'(x) = 2x + 2 = 0$

$x = -1 \in I$

$f(-1) = -1 = \min f$
 stac. body

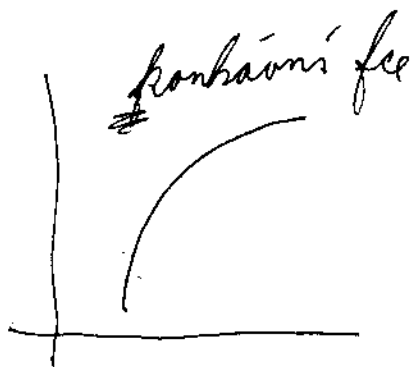
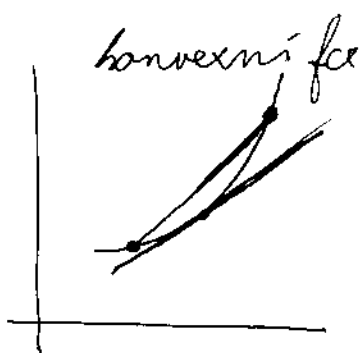


Pr



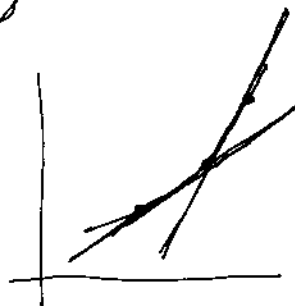
$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$

nemá max ani min



konvexní

- 1) úsečka s krajními body na grafu leží nad grafem
- 2) graf nad (na) tečnou
- 3) směrnice sečen neklesají



Def: Funkce f je konvexní na intervalu I , pokud pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$ je

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

konkávní

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

pro ostrou nerovnost ryze konvexní / konkávní

Věta: Je-li funkce f spojitá na intervalu I a má-li druhou derivaci uvnitř I , pak

1) $f'' > 0$ uvnitř I , pak f je ryze konvexní

2) $f'' < 0$ ————— " ————— konkávní

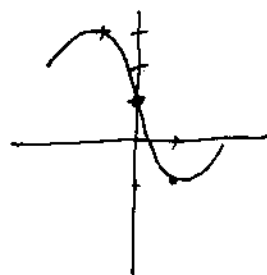
Př. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) > 0 \text{ na } (0; +\infty), \text{ konvexní } (0; +\infty)$$

$$f''(x) < 0 \text{ na } (-\infty; 0), \text{ konkávní } (-\infty; 0)$$



Def. Bod a je inflexní bod f , pokud $f'(a)$ existuje a pokud f je na některém jednostranném okolí a ryze konvexní a na druhém jednostr. okolí ryze konkávní

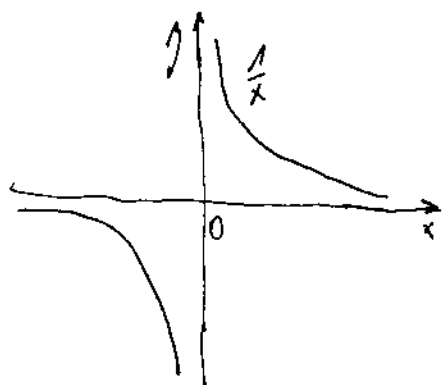
Věta: Je-li a inflexní bod f , pak buď $f''(a)$ neexistuje, nebo $f''(a) = 0$

Pozn. $f''(a) \neq 0$ znamená, že a je infl. bod (x^4)

$$f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0 \Rightarrow a \text{ je inflexní bod}$$

$$f''(a) = \dots = f^{(2m)}(a) = 0, f^{(2m+1)}(a) \neq 0 \Rightarrow a \text{ infl. bod}$$

Asymptoty



Def: asymptota funkce f v $a \in \{\pm\infty\}$ je přímka o rovnici $y = px + q$:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - px - q) = 0$$

Má-li f v $a \in \mathbb{R}$ alespoň jednu jednostrannou limitu nevládnou, pak přímka o rovnici $x = a$ je asymptota f v $a (\in \mathbb{R})$

Př: $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}x$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

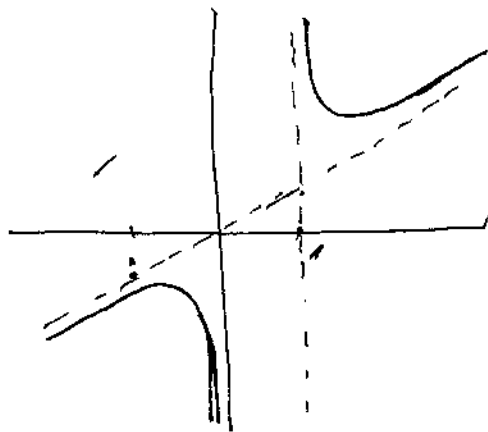
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left| \frac{1}{0^-} + \frac{1}{2} \right| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left| \frac{1}{0^+} + \frac{1}{2} \right| = +\infty$$

$x = 1$ asymptota

$y = \frac{1}{2}x$ v $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x-1} + \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{\frac{1}{2}x} \right) = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$



Twierdzenie: Mā-li f w $a \in \{\pm\infty\}$ asymptotą o równici

$$y = px + q, \text{ pak}$$

$$p = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - px)$$

połud było limityz existuji, pak pr. $y = px + q$ je asympł. w a

Pr.: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0 = q$$

$$\text{as. } \frac{1}{2}x \text{ w } \pm\infty$$

Tw. Mā-li f w $a \in \{\pm\infty\}$ as. a ex-li $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$, pak
sata limityz je stānānāci asymptoty

Pr. 1) $f(x) = x \sin x$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \text{ neex.}$$

as. neexistuji

2) $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

as. neexistuji

3) $f(x) = \ln x \quad D(f) = (0; \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 0x) = +\infty \quad \text{w } +\infty \text{ neex. asymptota}$$

$x=0$ je asymptota

Vyšetření průběhu funkce

- 1) f : definiční obor
nulové body, kde $f > 0$, $f < 0$
lichá, sudá, periodická (perioda)
spojitost, limity v bodech nespojitosti, krajních bodech $D(f)$
- 2) f' : monotonie, lokální extrémy, globální extrémy, $R(f)$ (obor hodnot)
těžny v bodech nespojitosti, ~~u~~ hran. bodech $D(f)$,
kde jednoduše derivace
- 3) f'' : konvexita, konkavita, inf. body (těžny)
- 4) asymptoty

Př. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{array} \right\} D(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty), \quad f \text{ je spojitá}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \quad D(f') = D(f)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = e$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \quad D(f'') = D(f)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x}{\ln x} = \left| \frac{1}{0^\pm} \right| = \pm \infty$$

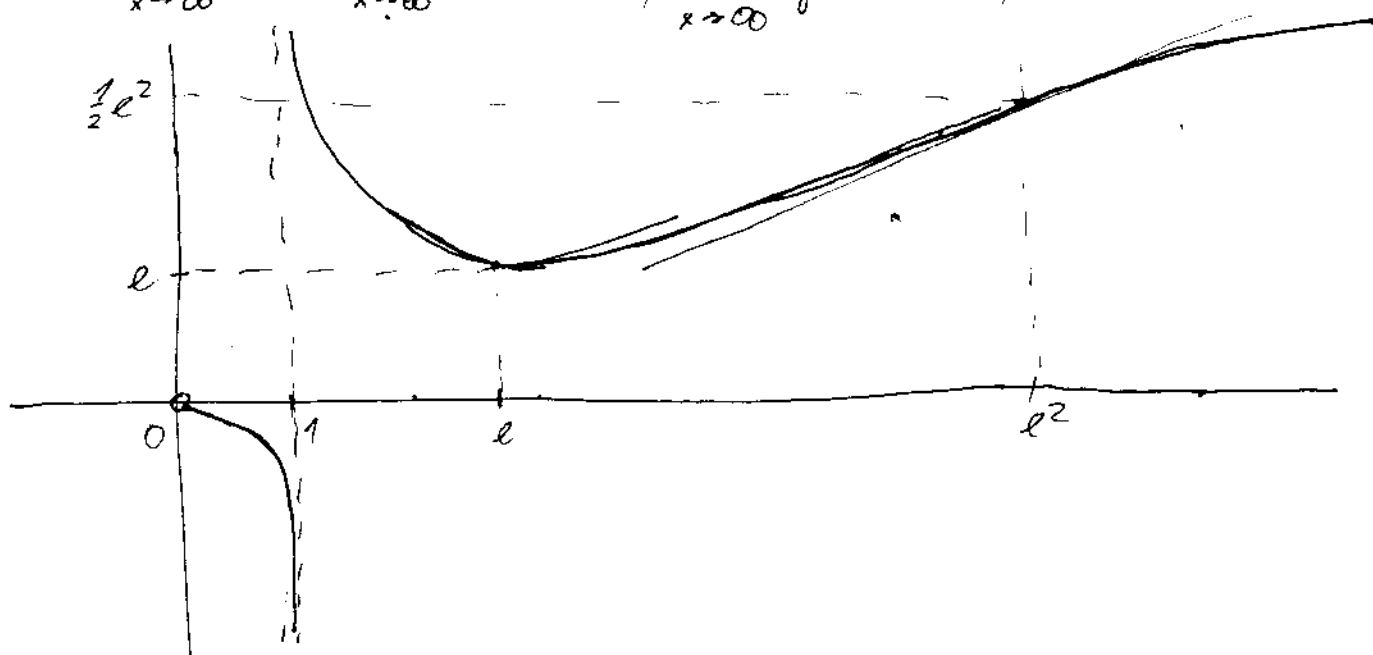
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{\ln x}}{\ln x} = \frac{1 - \frac{1}{-\infty}}{-\infty} = 0$$

x	0	1	e	e^2	$+\infty$
x	$(0, 1)$	$(1, e)$	(e, e^2)	$(e^2, +\infty)$	
limits $f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$+$
$-f'(x)$ monotonic	0	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$ conc/conv	$-$	$+$	$+$	$-$	

asymptote: $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \quad \text{as } x \rightarrow +\infty \text{ near.}$$



Def.: Fce F se nazývá primitivní fce k f na intervalu I ,
jestliže $F' = f$ na I .

Pozn.: Existují fce, které nemají prim. fci

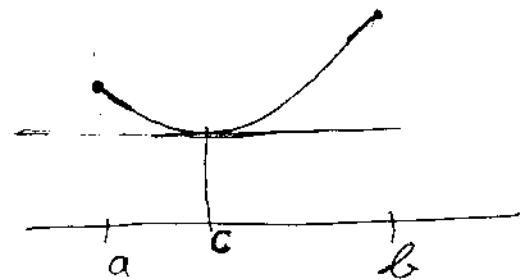
Věta: Necht f má lokalní derivaci na $\langle a, b \rangle$ a $f'_+(a) < d < f'_-(b)$.
Pak existuje $c \in (a, b) : f'(c) = d$

D.: $g(x) = f(x) - dx$

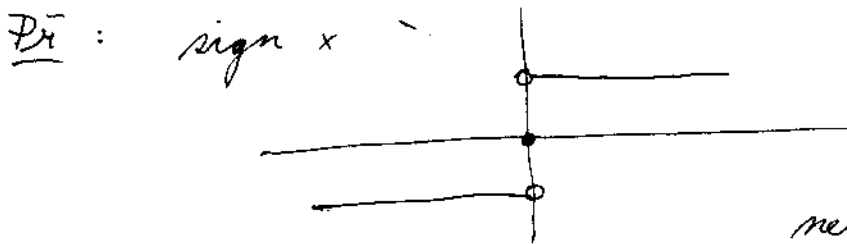
$$g'_+(a) = f'_+(a) - d < 0$$

$$g'_-(b) = f'_-(b) - d > 0$$

g nabývá minima v $c \in (a, b)$, $g'(c) = 0$



$$f'(c) - d = 0$$



není derivací jiné fce
- nemá primitivní funkci

Věta: Spojitá fce na intervalu má primitivní funkci

Pr. prim fce k e^{x^2} ... nelze najít ~~pro řešení~~ ^{derivaci} nějakých elementárních

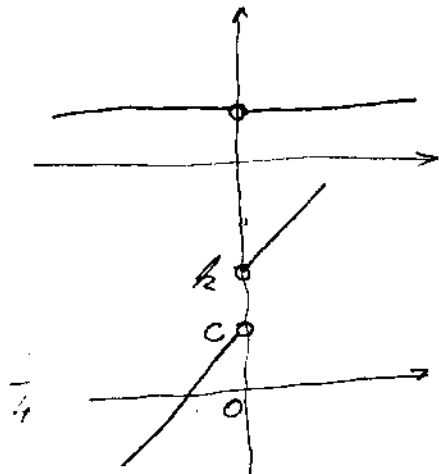
Tvrzení: 1) Je-li F primitivní k f na I , pak $F+c$ je prim. k f na I .
2) Je-li F, G prim. fce k f na I , pak $F-G$ je konstantní na I .

D.: 1) $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

2) $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = 0$, $G(x) - F(x)$ je konst.

Pr. $f(x) = 1$ na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$F(x) \begin{cases} x + c & \text{na } (-\infty, 0) \\ x + k & \text{na } (0, \infty) \end{cases}$$



Def. Existuje-li alespoň 1 primitivní fce F k f na I ,
pak množinu všech prim. fce k f na I nazýváme
neurčitý integrál f na I , zn. $\int f(x) dx = \int f$ ($= \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$)

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

↑
integrands

Průběh • $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{matrix} x < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} m \in \mathbb{Z}, m < -1$$

$$\bullet \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$\bullet \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad x > 0, (a \in \mathbb{R}) \text{ (někdy pro } x \in \mathbb{R})$$

Pr. $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$, $x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}, \quad x \geq 0$$

$$\bullet \int e^x dx = e^x + c \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\bullet \int \cos x dx = \sin x + c \quad \left. \vphantom{\int \sin x dx} \right\} x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x + c \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \quad x \in (-1, 1) \right)$$

Věta: pokud-li $F_1, \dots, F_m$ primitivizace $f_1, \dots, f_m$ na I ,
pak $c_1 F_1 + \dots + c_m F_m$ je prim. fce k $c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$

$$\int (c_1 f_1 + \dots + c_m f_m) = c_1 \int f_1 + \dots + c_m \int f_m$$

Pr. $\int \frac{(x-1)^2}{x} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx = \int (x - 2 + \frac{1}{x}) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln|x| + c$
 $x < 0, x > 0$

Věta (per partes): Necht' na intervalu I existují u, v, u', v'

$$\text{Pak } \int uv' = uv - \int u'v \quad \text{na } I$$

D.: $(uv - \int u'v)' = u'v + uv' - u'v$

Pr. 1) $\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx =$

$$= \underline{-x \cos x + \sin x + c}, \quad x \in \mathbb{R}$$

2) $\int x^2 e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = e^{2x} \\ u' = 2x & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \int -x \cdot e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = -x & v' = e^{2x} \\ u' = -1 & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right|$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= \underline{\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + c}$$

Pozn.: $\int P(x) e^{ax} dx$

$\int P(x) \sin ax dx$

$\int P(x) \cos ax dx$

použijeme PP

$$\underbrace{\int e^x \sin x dx}_I = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{array} \right| = -e^x \cos x + e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_I$$

$$I = e^x (\sin x - \cos x) - I$$

$$I = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C \quad x \in \mathbb{R}$$

$e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx$

$$\bullet \int x \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = \underline{x \ln x - x + C} \quad x > 0$$

$$\bullet \int x^a \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x^a \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^{a+1}}{a+1} \end{array} \right| = \frac{x^{a+1}}{a+1} \ln x - \int \frac{x^a}{a+1} dx =$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1} \ln x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + C, \quad x > 0$$

$P(x) \cdot \ln x$

substituce

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int f(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Věta (o substituci)

Nechť $(\alpha, \beta) \xrightarrow{\varphi} (a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, φ' vlastní na (α, β)

1) Je-li F prim. fce k f na (a, b) , pak $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$ na (α, β)

2) Je-li $\varphi : (\alpha, \beta) \xrightarrow{\text{na}} (a, b)$, $\varphi'(t) \neq 0$ na (a, b) ,

G je prim. fce k $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ na (α, β) , pak

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

D. 1) $\frac{d}{dt} (F(\varphi(t)) + C) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \checkmark$

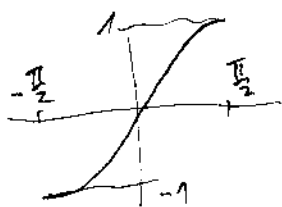
2) $\frac{d}{dx} (G(\varphi^{-1}(x)) + C) = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\underbrace{\varphi^{-1}(x)}_x) \cdot \cancel{\varphi'(t)} \cdot \frac{1}{\cancel{\varphi'(t)}}$

Pr. $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} (-2x) dx = \left| \begin{matrix} -x^2 = y \\ -2x dx = dy \end{matrix} \right| =$
 $= -\frac{1}{2} \int e^y dy = -\frac{1}{2} e^y + C = \underline{-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C}, x \in \mathbb{R}$

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = y \\ \cos x dx = dy \\ y = \arcsin x \end{matrix} \right| = \int y^3 dy = \frac{1}{4} y^4 + C = \underline{\frac{1}{4} \sin^4 x + C}, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = \sin y \\ dx = \cos y dy \end{matrix} \right| = \int \frac{\cos y dy}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \int dy = y + C =$$

$x \in (-1, 1) \leftrightarrow y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $\sqrt{\cos^2 y} = +\cos y$ na tomto I $\underline{= \arcsin x + C}$
 $\sin' y = \cos y \neq 0$ $x \in (-1, 1)$



Pozn.

$$1) \int f(x+a) dx = \left| \begin{array}{l} x+a = y \\ dx = dy \end{array} \right| = \int f(y) dy = F(y) + c = F(x+a) + c$$

Pr. $\int (x+1)^5 dx = \left| \begin{array}{l} x+1 = y \\ dx = dy \end{array} \right| = \int y^5 dy = \frac{1}{6} y^6 + c = \frac{1}{6} (x+1)^6 + c, x \in \mathbb{R}$

$$2) \int f(ax) dx = \left| \begin{array}{l} ax = y \\ a dx = dy \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int f(y) dy = \frac{1}{a} F(y) + c = \frac{1}{a} F(ax) + c$$

Pr. $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c, x \in \mathbb{R}$

$$3) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = y \\ f'(x) dx = dy \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c = \ln|f(x)| + c$$

Pr. $\frac{1}{2} \int \frac{2(x+2)}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + c, x \in \mathbb{R}$
meni abs, p. neboť je kladná

Pr. (těžší):

$$\int 1 \cdot \arctg x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{x^2+1} & v = x \end{array} \right| = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, x \in \mathbb{R}$$

Integrace rac. funkcí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{polynom} + \text{součet parciálních zlomků}$$

$$1) \frac{A}{(x-a)^n} \quad / \quad 2) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \quad p^2-4q < 0$$

$$1) \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \left| \begin{array}{l} x-a = y \\ dx = dy \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y^n} = \begin{cases} \ln|y| + C & n=1 \\ \frac{y^{-n+1}}{-n+1} + C & n>1 \end{cases}$$

$$\underline{\text{Př.}}: \int \frac{-x^3+6x^2-4x+1}{x^2(x-1)^2} dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| - \frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + C \quad \begin{array}{l} x \in (-\infty; 0) \\ x \in (0, 1) \\ x \in (1; +\infty) \end{array}$$

$$2) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\overbrace{(2x+p)}^{\text{der}(\cdot)} \cdot \frac{A}{2}}{(x^2+px+q)^n} + \frac{\overbrace{B - \frac{1}{2}pA}^{\text{ústo}}}{(x^2+px+q)^n}$$

$$\underline{\text{Př.}}: \int \frac{4x+1}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + \int \frac{5}{x^2-2x+5} dx$$

$4-20 < 0$

$$2a) \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = y \\ (2x+p)dx = dy \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y^n}$$

$$\underline{\text{Př.}} \quad 2 \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} = \cancel{2 \ln(x^2-2x+5)} + C \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{Př.}} \quad \int \frac{4x-2}{(x^2-x+3)^3} dx = \int \frac{(2x-1) \cdot 2}{(x^2-x+3)^3} dx = \left| \begin{array}{l} x^2-x+3 = y \\ (2x-1)dx = dy \end{array} \right|$$

$D = 1-12 < 0$

$$= \int \frac{2}{y^3} dy = \frac{-1}{y^2} + C = \frac{-1}{(x^2-x+3)^2} + C \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2b) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^n} \int \frac{dx}{\left[\underbrace{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2}_{z} + 1\right]^n}$$

Bz. $\int \frac{5}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{5}{(x-1)^2+4} dx = \frac{5}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} =$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} = y \\ \frac{1}{2} dx = dy \end{array} \right| = \frac{5}{2} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{5}{2} \operatorname{arctg} y + C =$$

$$= \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{4x+1}{x^2-2x+5} dx = 2 \ln(x^2-2x+5) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$n > 1) I_n = \int \frac{dy}{(y^2+1)^n} = \int \overbrace{\frac{1}{(y^2+1)^{n-1}}}^{I_{n-1}} dy + \int \overbrace{\frac{-y^2}{(y^2+1)^n}}^{I'} dy$$

$$I' = \left| \begin{array}{ll} u=y & u'=1 \\ v=\frac{1}{2(y^2+1)^{n-1}} & v' = \frac{-2y}{2(y^2+1)^n} \end{array} \right| = \frac{y}{2(n-1)(y^2+1)^{n-1}} - \int \overbrace{\frac{1}{2(n-1)(y^2+1)^{n-1}}}^{\frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}} dy$$

new radius
n shows

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{y}{2(n-1)(y^2+1)^{n-1}}$$

$$I_1 = \operatorname{arctg} y + C$$

$$\underline{B5} \quad 1) I_2 = \int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \frac{1}{2} I_1 + \frac{y}{2 \cdot 1 \cdot (y^2+1)^1} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + \frac{y}{2(y^2+1)} + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2) \int \frac{2}{(x^2-6x+10)^2} dx = \frac{2}{((x-3)^2+1)^2} dx = \left| \begin{array}{l} x-3 = y \\ dx = dy \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2}{(y^2+1)^2} dy = \operatorname{arctg}(x-3) + \frac{x-3}{x^2-6x+10} + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{1} \quad a \neq 0, \text{ var. free} \quad \int R(e^{ax}) dx = \left| \begin{array}{l} e^{ax} = y \\ x = \frac{1}{a} \ln y \\ dx = \frac{1}{ay} dy \end{array} \right| = \int R(y) \cdot \frac{1}{ay} dy$$

$$\int \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 3}{e^{4x} - 1} = \left| \begin{array}{l} e^{2x} = y \\ x = \frac{1}{2} \ln y \\ dx = \frac{1}{2y} dy \end{array} \right| = \int \frac{y^2 + 2y + 3}{y^2 - 1} \frac{dy}{2y} =$$

$$= \int \left(\frac{-3}{y} + \frac{3}{y-1} + \frac{1}{y+1} \right) = -3 \ln|y| + 3 \ln|y-1| + \ln|y+1| + C =$$

$$= -3 \ln e^{2x} + 3 \ln|e^{2x}-1| + \ln(e^{2x}+1) + C =$$

$$= -6x + 3 \ln|e^{2x}-1| + \ln(e^{2x}+1) + C \quad \begin{array}{l} x \in (-\infty, 0) \\ x \in (0; \infty) \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \int R(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = y \\ \frac{1}{x} dx = dy \end{array} \right|$$

$$\underline{\text{Bx.}} \quad \int \frac{2}{x(\ln^2 x + 4)} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = y \\ \frac{1}{x} dx = dy \end{array} \right| = \int \frac{2}{y^2 + 4} dy = \dots = \arctan \frac{\ln x}{2} + C$$

$x \in (0, \infty)$

$$\textcircled{3} \quad \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = y \\ x = R_2(y) \\ dx = R_2'(y) dy \end{array} \right|$$

$ad - bc \neq 0$

$$\underline{\text{Bx.}} \quad \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} dx =$$

$\mathcal{D}(f) = (-1, \infty)$

$$= \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = y \\ \frac{x-1}{x+1} = y^2 \\ x-1 = y^2 x + y^2 \\ x(1-y^2) = 1+y^2 \\ x = \frac{1+y^2}{1-y^2} \\ \frac{dx}{dy} = \frac{2y(1-y^2) - (1+y^2)(-2y)}{(1-y^2)^2} = \frac{4y}{(1-y^2)^2} \\ dx = \frac{4y}{(1-y^2)^2} dy \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{4y}{(1-y^2)^2} dy = \int \frac{4y}{(1-y)(1+y)^3} dy = \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{2}(x^2-1 - \sqrt{x^2-1}) + C}}$$

$$\int \mathbb{R}(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{arctg} y \\ dx = \frac{2}{1+y^2} dy \end{array} \right|$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$$

$$x \in (-\pi, \pi) \leftrightarrow (-\infty, \infty) \\ (+2k\pi)$$

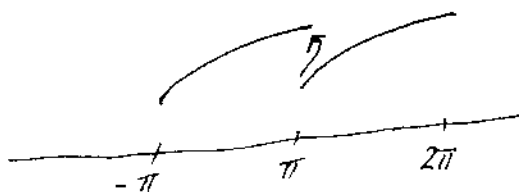
$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\int \frac{1 + \cos x}{2 + \sin x} dx = \left| \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{arctg} y \\ dx = \frac{2}{1+y^2} dy \end{array} \right| = \int \frac{1 + \frac{1-y^2}{1+y^2}}{2 + \frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2} dy = \dots$$

$x \in (-\pi, \pi)$

integr. se. na $\mathbb{R}$



- poskládať
- posanovať
na intervaloch

a) „súde súč.“
 $\operatorname{tg} x = y$

$$\left| \begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} y \\ dx = \frac{1}{1+y^2} dy \end{array} \right|$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ (+2k\pi)$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1+y^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dots = \frac{y}{1+y^2}$$

$$\underline{\text{Br.}} \quad \int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} x = \arctan y \\ dx = \frac{1}{1+y^2} dy \end{array} \right| = \int \frac{1 + \frac{1}{1+y^2}}{\left(\frac{1}{1+y^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy =$$

$$= \int (y^2 + 2) dy = \frac{1}{3} y^3 + 2y + C = \frac{1}{3} \tan^3 x + 2 \tan x + C$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$$

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cdot \cos x dx$$

$$\int R(\cos x, \sin^2 x) \cdot \sin x dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = y \\ \cos x dx = dy \end{array} \right| =$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - y^2$$

$$= \int \frac{1}{(1-y^2)^2} dy = \dots \quad \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + C$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$$

$$\int \sin^5 x \cos^6 x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = y \\ -\sin x dx = dy \end{array} \right| = - \int (1-y^2)^2 y^6 dy = \dots$$

$$- \sin^4 x \cos^6 x (-\sin x) dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

$$\rightarrow \sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$$

$$\sqrt{a^2-x^2} \quad \dots \quad x = a \cdot \sin y$$

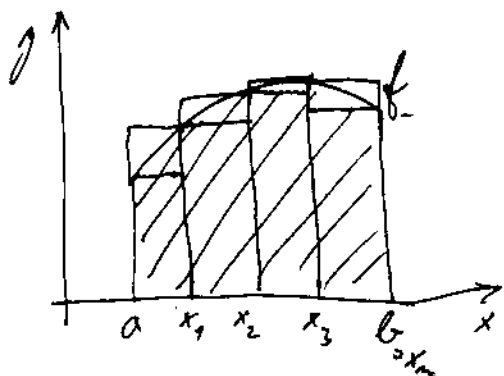
$$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{\text{Př.}} \quad \int \sqrt{4-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin y \\ dx = 2 \cos y dy \end{array} \right| = \int 2 \cos y \cdot 2 \cos y dy = \dots$$

$$x \in (-2, 2) \Leftrightarrow y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C$$

Určitý integrál



dělení $\langle a, b \rangle$, $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = b\}$

dolní součet $\underline{S}(f, D) = \sum_{k=1}^m \inf_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$

horní součet $\bar{S}(f, D) = \sum_{k=1}^m \sup_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$

D_1, D_2

$$\inf f \cdot (b-a) = \underline{S}(f, \{a, b\}) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq$$

$$\leq \bar{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq \bar{S}(f, D_2) \leq \bar{S}(f, \{a, b\}) = \sup f \cdot (b-a)$$

Def: Necht f je omezená na $\langle a, b \rangle$, označme $\mathcal{D}$ mn. všech dělení $\langle a, b \rangle$. Jestliže

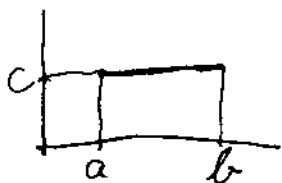
$$\sup \{ \underline{S}(f, D) : D \in \mathcal{D} \} = \inf \{ \bar{S}(f, D) : D \in \mathcal{D} \},$$

pak se tato hodnota nazývá určitý (Riemannův) integrál f na $\langle a, b \rangle$

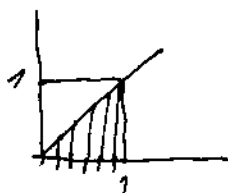
$$\int_a^b f(x) dx, \quad (R) \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f$$

$a, b, \dots$ dolní, horní mez

Př. 1) $\int_a^b c dx = c(b-a)$ $\sup_D \underline{S}(f, D) = c(b-a)$
 $\inf_D \bar{S}(f, D) = c(b-a)$



2) $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$



$$D_n = \{0, 0 + \frac{1}{n}, 0 + \frac{2}{n}, \dots, 1\}$$

$$\underline{S}(x, D_n) = 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

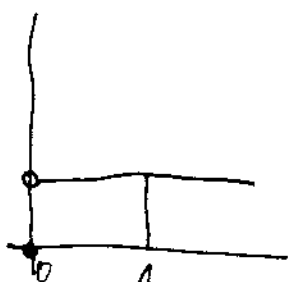
$$= \frac{1}{n^2} (0 + 1 + 2 + \dots + n-1) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

$$\bar{S}(x, D_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

$$3) \int_0^1 \text{sign } x \, dx = 1$$



$$D_m = \{0, \frac{1}{m}, 1\}$$

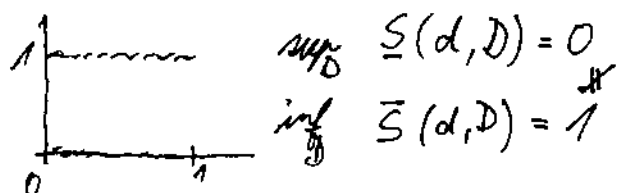
$$\underline{S} = (\text{sign } x, D) = 0 \cdot \frac{1}{m} + 1 \cdot (1 - \frac{1}{m}) = 1 - \frac{1}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$$

$$\bar{S} = 1 \cdot \frac{1}{m} + 1 \cdot (1 - \frac{1}{m}) = 1$$

fce lišící se v konečné množině bodů mají stejný vrš. integrál

$$4. \, d(x) \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

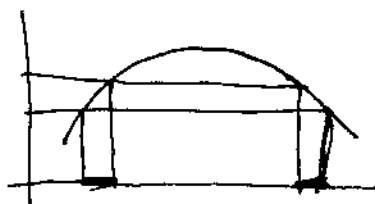
$$\int_0^1 d(x) \, dx \text{ neexistuje}$$



$$\sup \underline{S}(d, D) = 0$$

$$\inf \bar{S}(d, D) = 1$$

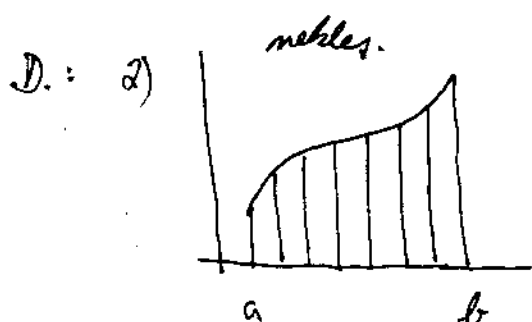
Lebesgueův integrál



Věta: $\int_a^b f(x) dx$ existuje, pokud platí některá z podm.

1) f je spojitá na $\langle a, b \rangle$

2) f je monotonní na $\langle a, b \rangle$



$$D_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, b \right\}$$

$$\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Pozn: $\int_a^b f(x) dx$ ex. posl. $D_n: \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n)$

Věta: Necht $\int_a^b f, \int_a^b g$ ex., $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$1) \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\underbrace{\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D)}_{\substack{\downarrow \\ \int_a^b f + \int_a^b g}} \leq \underline{S}(f+g, D) \leq \bar{S}(f+g, D) \leq \underbrace{\bar{S}(f, D) + \bar{S}(g, D)}_{\substack{\downarrow \\ \int_a^b f + \int_a^b g}}$$

$$= \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$2) \int_a^b c \cdot f = c \int_a^b f$$

$$c > 0 \quad \underline{S}(cf, D) = c \underline{S}(f, D)$$

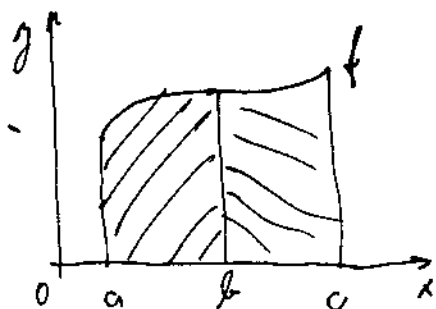
$\int_a^b: f \in R(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, lineární zobrazení

3) $f \leq g$ na $\langle a, b \rangle$, pak $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

$$\underline{\int}(f, D) \leq \underline{\int}(g, D)$$

4) $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

~~ne~~ $-|f| \leq f \leq |f| \quad -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$



Věta: Necht $a < b < c$. Pak

$\int_a^c f$ ex. právě tehdy, když ex $\int_a^b f, \int_b^c f$.

Vlastním případě $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

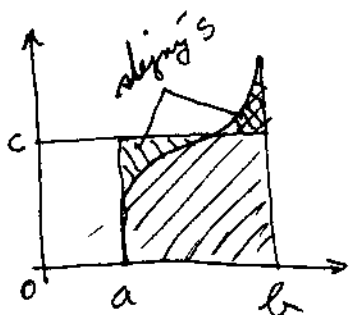
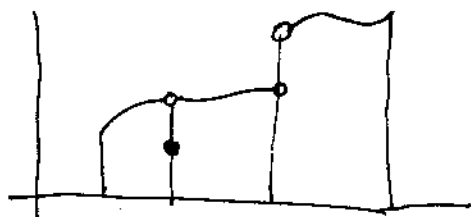
II. $\left. \begin{array}{l} D_1 \text{ int } \langle a, b \rangle \\ D_2 \text{ int } \langle b, c \rangle \end{array} \right\} \rightarrow D_1 \cup D_2 \text{ del } \langle a, c \rangle$

$D \text{ int } \langle a, c \rangle \rightarrow D \cup \{b\} \begin{cases} D_1 \text{ na } \langle a, b \rangle \\ D_2 \text{ na } \langle b, c \rangle \end{cases}$

Pozn $\int_a^a f = 0$, $\int_b^a = -\int_a^b$

→ věta pro $a, b, c \in \mathbb{R}$

Důst : Po částech spojitě fce mají n. int.
 - konečné bodů nesp. - v nich ol. jedn. lins.



střední hodnota f na $\langle a, b \rangle$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Věta : Je-li f spojitá na $\langle a, b \rangle$, pak existuje $c \in (a, b)$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

D. : $\inf f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup f \cdot (b-a)$

$$\min f = \inf f \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{= f(c)} \leq \sup f = \max f$$

Věta: Necht' $\int_a^b f$ ex.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

1) F je spojita na $\langle a, b \rangle$

2) $F'(x) = f(x)$, je-li f spojita v x

D: 1) $|f| \leq M$ (ome)

$$1) |F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| =$$

$$= \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \text{sign } h \cdot \int_x^{x+h} |f(t)| dt \leq \text{sign } h \cdot \int_x^{x+h} M dt =$$

$$= M|h| \xrightarrow{h \rightarrow 0(\pm)} 0$$

$$2) \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

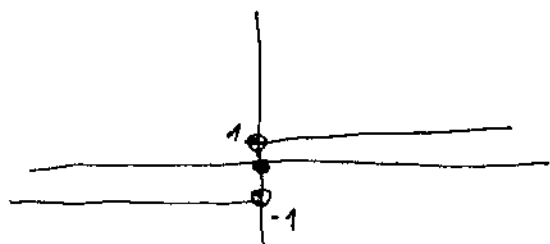
$\xrightarrow{h \rightarrow 0(\pm)} 0$

$\underbrace{\qquad}_{\text{f spoj v } x / \text{ malí } \varepsilon > 0}$

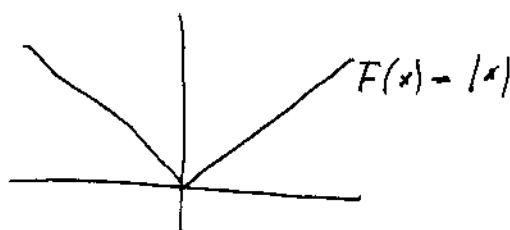
Př. $f(x) = \text{sign } x$

$$F(x) = \int_0^x \text{sign } t dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^x 1 dt = x, \quad x \geq 0 \\ \int_0^x -1 dt = -x, \quad x \leq 0 \end{array} \right\} |x|$$



$$F'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$$F'_+(0) = 1 = f(0+)$$

$$F'_-(0) = -1 = f(0-)$$

Věta: Spojitá fce na intervalu má primitivní funkci.

D. f spoj. na I , $a \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $F'(x) = f(x)$ na I

integrál-fce horní mez

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$$

$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$
 spojita

Věta: (Newtonova - Leibnizova formule)

Nechť f je omezená na $\langle a, b \rangle$, $\int_a^b f$ ex., F je prim. k f na $\langle a, b \rangle$

Pak $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

D. $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = b\}$

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^m (F(x_i) - F(x_{i-1})) \stackrel{\text{Lagrange}}{=}$$

$$\exists c_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$\sum_{i=1}^m F'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^m f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{S}(f, D) \leq F(b) - F(a) \leq \bar{S}(f, D)$$

$\xrightarrow{\text{sup}} \int_a^b f(x) dx \xleftarrow{\text{inf}}$

Pr. $\int_0^\pi x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u=x & u'=1 \\ v=\sin x & v'=\cos x \end{matrix} \right| = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx =$

$$= \pi - 0 + [\sin x]_0^\pi = \underline{\underline{\pi}}$$

Pr. $\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx = \left| \begin{matrix} x^2+1=y \\ 2x dx = dy \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{y} dy = \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)}}$

$$3) \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = y \\ \cos x \, dx = dy \end{array} \right| = \int_0^0 y \, dy = \underline{\underline{0}}$$

$$4) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin y \\ dx = \cos y \, dy \end{array} \right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\cos y} \cos y \, dy =$$

$x \in (-1, 1) \leftrightarrow y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2y) \, dy = \left[\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{2} \sin 2y \right) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} + 0 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Pozn. Newtonův integrál

$$(N) - \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = \underbrace{F(b-)}_{\lim_{x \rightarrow b-} F(x)} - \underbrace{F(a+)}_{\lim_{x \rightarrow a+} F(x)}$$

Pr. 1) $f(x) = \text{sign } x$ $(\mathbb{R}) - \int_{-1}^1 \text{sign } x \, dx = 0$

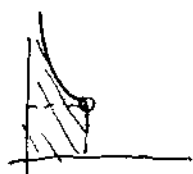


$$(N) - \int_{-1}^1 \text{sign } x \, dx \text{ neex. - neex. prim fce}$$

2) $f(x) = e^{-x^2}$

$$(\mathbb{R}) - \int_0^1 f(x) \, dx = (N) - \int_0^1 f(x) \, dx, \quad F \text{ nelze vyjádřit pomocí element. fce}$$

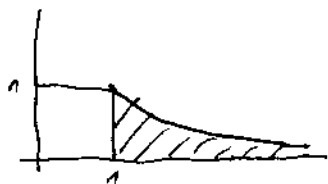
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0, 1)$



$$(\mathbb{R}) - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \text{ neex}$$

$$(N) - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \left[2\sqrt{x} \right]_0^1 = \underline{\underline{2}}$$

$$4) f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in (1, +\infty)$$



$$(R) - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ neex}$$

$$(N) - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1$$

Neoplastní integrál

- 1) neoplastní hodnota $(\pm\infty)$
- 2) a neomezené fce
- 3) na neomezeném intervalu

Def: Necht $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$; $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $\int_c^d f(x) dx$ existuje pro každý $\langle c, d \rangle \subset (a, b)$. Položíme

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \left(\lim_{d \rightarrow b^-} \int_c^d f(x) dx \right), \text{ pokud tato lim. ex.}$$

Je-li vlastní, říkáme, že konverguje.

$$\begin{aligned} \underline{\text{Pr}}: 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \left[\arctg x \right]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \underline{\underline{\pi}} \quad \dots \text{konverguje} \end{aligned}$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x - \ln 1 = \underline{+\infty} \quad \dots \text{existuje}$$

$$\begin{aligned} 3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \\ &= \infty - \infty \quad \dots \text{neex.} \end{aligned}$$

$$\underline{Pr} \quad 1) \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = e^{-x} \\ u' = 1 \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = [-x e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} +e^{-x} dx =$$

$$= 0 - 0 + [-e^{-x}]_0^{\infty} = -(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{x} = y \\ \frac{1}{x^2} dx = dy \end{array} \right| = \int_{-1}^0 e^y dy = [e^y]_{-1}^0 = \underline{\underline{1 - e^{-1}}}$$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x} = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\ln|x| - \ln|x+1| \right]_1^{\infty} =$$

$$= \left[\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \right]_1^{\infty} = 0 - \ln \frac{1}{2} = \underline{\underline{\ln 2}}$$

Věta: 1) Necht' $|f| \leq g$ na (a, b) , f je po částech spojitá, $\int_a^b g$ konverguje. Pak $\int_a^b f$ konverguje.

2) Necht' $f \leq g$ na (a, b) , $\int_a^b f(x) dx = +\infty$.
Pak $\int_a^b g(x) dx = +\infty$

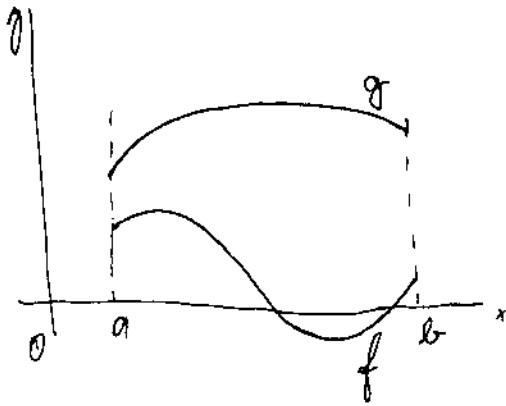
$$1) \int_0^1 x^a dx = \begin{cases} a = -1 & [\ln x]_0^1 = 0 - (-\infty) = +\infty \\ a \neq -1 & \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = \begin{cases} a < -1 & \frac{1}{a+1} + \infty = +\infty \\ a > -1 & \frac{1}{a+1} - 0 = \frac{1}{a+1} \end{cases} \end{cases}$$

... konverguje
právě pro $a > -1$

Věta: Necht' $f \leq g$ jsou spojité na $\langle a, b \rangle$.

Obrázek obrázce symetrického grafy funkcí f, g a přímkami
a rekt. $x=a, x=b$ je

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



$$\bar{S}(f, D_n), \bar{S}(g, D_n), \underline{S}(f, D_n), \underline{S}(g, D_n)$$

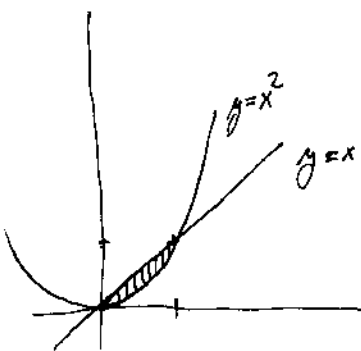
$$\text{konv. k. } \int_a^b f, \int_a^b g$$

$$\bar{S}(g, D_n) - \bar{S}(f, D_n) \leq P \leq \bar{S}(g, D_n) - \underline{S}(f, D_n)$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq P \leq \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

Pr x^2, x

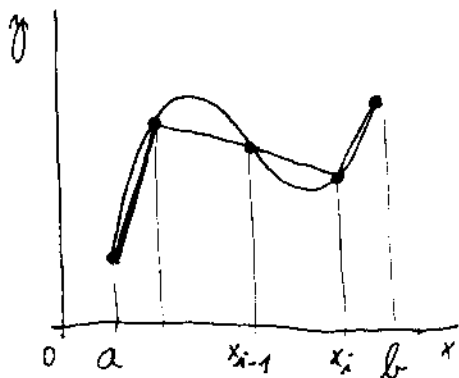


$$P = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

Věta: Necht $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitou derivaci

Délka grafu f je

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



$$L(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

Lagrange

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$\uparrow$
 (x_{i-1}, x_i)

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{S}(\sqrt{1+f'^2}, D) \leq L(D) \leq \bar{S}(\sqrt{1+f'^2}, D)$$

$\downarrow$ ~~Let~~ $k \rightarrow \infty$

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \leq \text{délka kř.} \leq \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

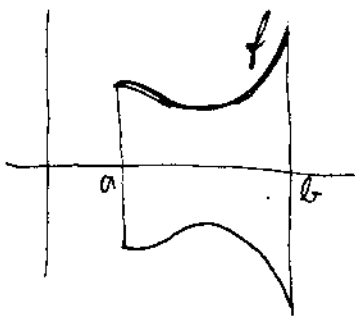
Pr



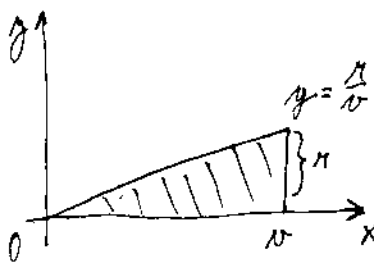
$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{\sqrt{1 + (\sinh x)^2}}_{\cosh^2 x} dx &= \int_0^1 \cosh x dx = \\ &= [\sinh x]_0^1 = \sinh 1 - 0 = \sinh 1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

Věta : Necht' f je kladná spojitá fce na $\langle a, b \rangle$.
objem tělesa vymezeno plochou vzniklou rotací
grafu f a rovinami $x=a, x=b$ je

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Pr : objem kužele

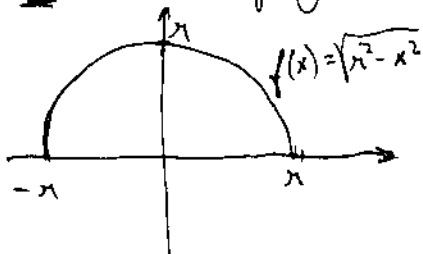


$$V = \pi \int_0^v \frac{h^2}{v^2} x^2 dx = \pi \left[\frac{h^2}{3v^2} x^3 \right]_0^v = \frac{1}{3} \pi h^2 v$$

Věta Necht' f je kladná ~~spojitá~~ fce se spojitou derivací na $\langle a, b \rangle$.
obsah plochy vzniklé rotací grafu f kolem x je

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Pr obsah sféry

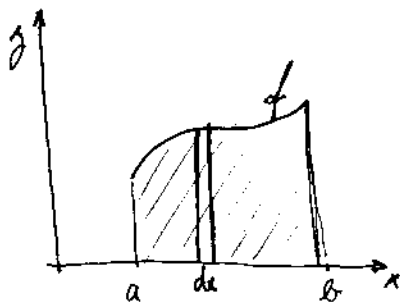


$$S = 2\pi \int_{-h}^h \sqrt{h^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{h^2 - x^2}} \right)^2} dx = 2\pi \int_{-h}^h \sqrt{h^2 - x^2 + x^2} dx = 2\pi \int_{-h}^h h dx = 2\pi h \cdot 2h = 4\pi h^2$$

Arēns lēvīstē

plōcha

$$x_T = \frac{M_y}{m} \quad y_T = \frac{M_x}{m}$$

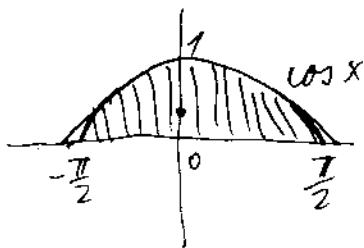


$$m = \int_a^b f(x) dx$$

$$M_y = \int_a^b x f(x) dx$$

$$M_x = \int_a^b \frac{1}{2} f(x)^2 dx$$

lēt



$$m = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$$

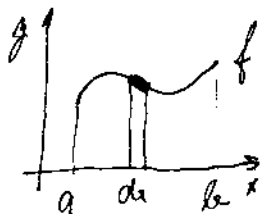
$$M_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$M_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x dx = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_T = 0}}$$

$$\underline{\underline{y_T = \frac{\pi/4}{2} = \frac{\pi}{8}}}$$

līvīks

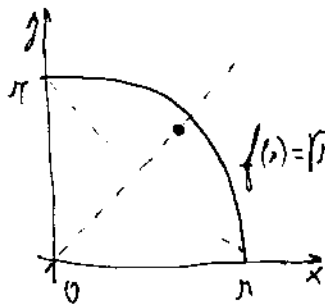


$$m = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$M_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

B5



$$m = \frac{\pi}{2} \pi$$

$$M_x = \int_0^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$
$$= \int_0^{\pi} \pi dx = \underline{\pi^2}$$

$$x_T = y_T = \frac{\pi^2}{\frac{\pi}{2} \pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \pi$$

microanalýzy (formální) v boděch a písemně
kubicko@math.feld.cvut.cz

- 5 praktických
1x limity - limita L'H, asympt. grafy...
1x derivace (průběhy, tečny, Taylor...)
neurčité, určité integrály (náhl. substituce, ...)
a 1 teoretický př.
(výp. z def, důkaz...)