

L. Mendovich
mendovich@math.feld.cvut.cz

<http://pitbul.wz.cz>

seminářová práce - stat, příp. pravděp
odevdat el. nebo papír, ale ne WORD!

rozsah 2-50 stran

mělo by být vše co používáme,
treba naměřená data (pokud jich není třeba 100 000)

vymyslet si sami - aby bylo smysluplné
odevdat vás

3 absence nevadí, více vadit může

př. práce - řešení jely na úteky $\rightarrow \pi$

literatura - asi slouží předmětů

Pravděp a statistika pro inženýry

MatFys	Andel	Matematika náhody
		Mat statistika - teorii

přemýšl. vše

(zkouška - bylo 4 př. po 6 b, od asi 10 b náhodou
13 - 3, 17 - 2, 20(1) - 1 mění zlepšení
ještě se upřesní)

①

Př. hra na 6 větvích, stará pravidla po HS v šachy
počítají pouze větvě,

skončí $A : 5$
 $B : 3$

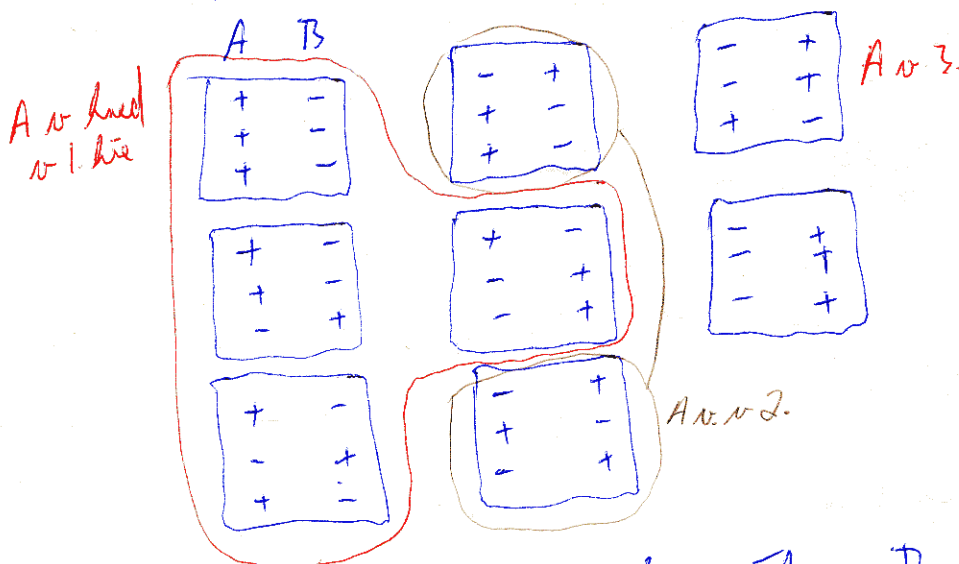
čili nedohráno

kolik práz A, kolik B

1. řešení - rozdělit ve stejném poměru (5:3)

2. - dát vše A - asi není spravedlivé, neboť
mohl vyhrát B

k 1) jak mohou pokračovat



pouze 1 možnost výhry B, 7 možností A
rozdělení výhry $\rightarrow A 7, B 1$

NA DOMA

spóčítat / naprag.

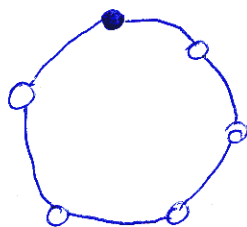
kātur minci, kādž par dostanu minci,
padne orel - dām minci

ja jāk pravdēp, tē būdu $v +$ (vī minci nēz
na kācātky, nēbo ~~šēn~~ byla $+$ a spadlo no nulu)
nēbo v minusu (nēl jēm $-$ a dōšl na 0)

$$\begin{array}{r} + \quad 0 \\ - \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

udētā simulaci, jāk tōsō jēm v plusu

Pr pro sājemē na doma



• vllk

○ ovēika

! jēdno jē geniālā
matematik

požylūjē sē jēs vllk - vpravo: vltō - 1:1
kam māt. ovēika, ody jē vllk sēvāt
pōstēstnī pravdēp, tē būdē sēvānā
jako pōstēstnī, byla nējvētī

Pravděpodobnost

hod kostkou 1...6

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

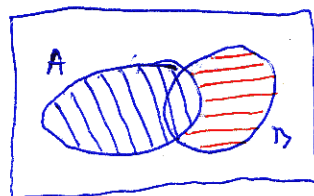
$$P(X = k) = \frac{1}{6}$$

$$B, A \subseteq \Omega$$

$$P(X \in A) = |A| \cdot \frac{1}{6}$$

$$P(X \in A \cup B) = P(X \in A) + P(X \in B \setminus A) =$$

$$A \cup B = A \cup B \setminus A$$



$$= \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{6}$$

př.

A... sudé č - pravděp $\frac{1}{2}$
B... prvočíslo - $\frac{1}{2}$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 3, 5\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

nebo bychom obvykle spočítali pravděp
sjednocení a průniku mn.

také mn. rozdíl

$$A \setminus B$$

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

p je funkce domů usavů.
intervalu 0,1

$$P(A) \geq 0$$

$$P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ pak } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$A \subseteq B \text{ pak } P(A) \leq P(B) \quad \dots \text{ je monotonní}$$

pravděp. výrobní kmetek 0,001

jaká pravděp. je že v 1000 výrobků 1 kmetek
 ≤ 1 —
 ≤ 2 kmetky

$$1 \text{ k. } (0,999)^{1000} \doteq 0,37 \quad - \text{ každý kmetek}$$

~~0,37~~

$$1000 \cdot (0,999)^{999} \cdot 0,001 \doteq 0,37$$

$$n(1-p)^{n-1} \cdot p$$

≤ 1 kmetek

0 k a 1 k disjunktní — seče se

≤ 2 počet možností, holikrát mohou být 2 kmetek

$$\binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$1 = (p + 1-p)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

... součet pravděp.
pro každý počet kmetek

(2)

pr. šifra $m \equiv m^d \pmod{p \cdot q}$
 $m \equiv m^2 \pmod{p \cdot q}$

pravděř. alg. na nalezení velkých prvočísel

x -- počet prvočísel menších x označme $\pi(x)$

(1) $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi(x)}{x}}{\frac{1}{\ln x}} = 1$

- jistě je pravděř., že náhodně číslo je prvočíslo

$\frac{2}{\ln x}$ pokud nebudeme volit sudá čísla

- dále jednoduchý test - dělení malými prvočísly-rychlé

- pak Rabin-Müller test

když projde, pak s pravděř. $\frac{1}{4}$ není prvočíslo
neprojde, určitě není prvočíslo

další přechody = zprůvěření

otázka. 100 mil. prvočíslo? p

holistický test, aby $P(p \text{ - prvočíslo}) \geq 1 - 10^{-6}$

ROZMYSLJET DOMA

nejdříve určit odhad počtu 100 mil. prvočísel.

(1) pro 100 - pro 99

a pak ten Rabin-Müller

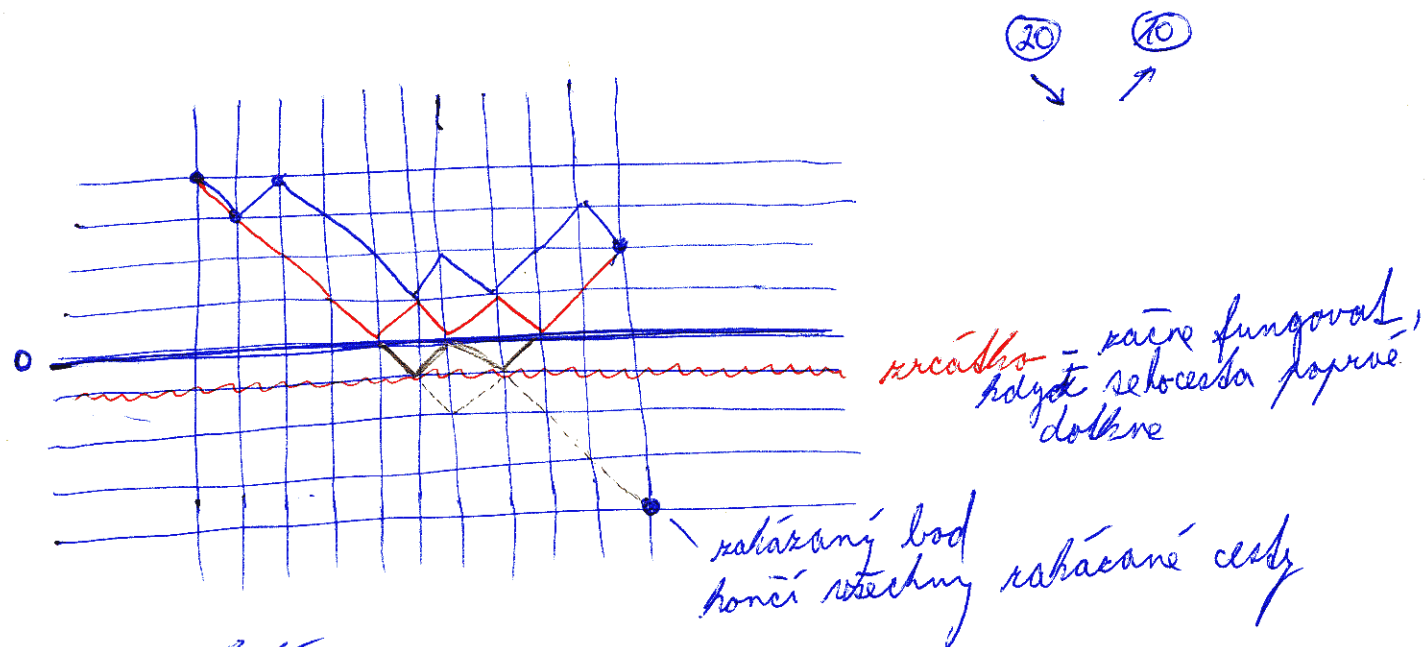
pr kotvení na mince
 - při minci sež vše stojí - vraci
 nemá na vrácení - rozliší se

bere ⑩, ⑫ a vydává zboží
 např. zboží za 10 a nemá jak vrátit na ⑫, - K.O.

otázka - kolik dát do přístroje peněz, aby nebylo
 třeba volat technika s P 95%

předpoklady - přijde n lidí, kteří sam budou vrátit mince
 polovina lidí ⑩, polovina ⑫, nemáme pořadí
 zboží stojí 10

úloha na téma náhodná procházka



n - lidí

k - desetikoruna

$n-k$ - dvacetikoruna

d - poč. stav automatu

$\binom{n}{k}$ - počet všech cest (zjistíme, jak může n lidí přijít
 (možnosti, jak rozmístit ⑩ mezi n lidi)

dostat se na 'kraj' - vyšetřoval $d+1$ (20)

(20) zbývá $m-k-d-1$

jak je rozmístil v m případech

počet rozložených cest $\binom{m}{m-k-d-1}$ a počítal se všemi cestami

pro $m=30$

$k=15$

a $P=95\%$ nezareknuji

$\rightarrow d=6$

$m=120$	$m=30$	120
$k=60$	$k=10$	40
$d=13$	$d=13$	43
96%	98%	95%

skutečná P
(neboť je to
diskrétní)

96%

96%

98%

95%

Hypergeometrické rozdělení

m - výrobků

k - vadných

vyberu l výrobků a mám j vadných - jaká P to je?

počet všech výběrů $\binom{m}{l}$

výběry špatných $\binom{k}{j}$

výběry dobrých $\binom{m-k}{l-j}$

$$P_L(j) = \frac{\binom{k}{j} \binom{m-k}{l-j}}{\binom{m}{l}}$$

a tomuto rozdělení
se říká hypergeometrické

σ -algebra $\mathcal{A}$ podmnožin množiny A

- 1) $A \in \mathcal{A}$
- 2) $u \in \mathcal{A}$ pak $A - u \in \mathcal{A}$
- 3) $u_i \in \mathcal{A} \quad i \in \mathbb{N}$ pak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} u_i \in \mathcal{A}$

Pravděpodobnost na $\mathcal{A}$

$$P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

- (2)
- 1) $P(A) = 1$
 - 2) $P(A - u) = 1 - P(u)$
 - 3) u_i po dvou disjunktní pak

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} u_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(u_i)$$

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$f(x) = 1$$

splňuje tato P

$$P(u) = \int_u f(x) dx$$

$$u \subseteq [0, 1]$$

$$= \int_0^1 x(x) dx$$

$$x_u(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in u \\ 0 & \text{if } x \notin u \end{cases}$$

odpovídat těm bodům 1-3 ; nebrat pro ∞

(3)

Př. Jsme schopni měřit čas s libovolnou přesností.

Autobus má hodinové intervaly, ale nevím, kdy jede.

Přijdu na zastávku někdy v rozmezí 0-60 min od posledního autobusu.

Jak bude vypadat σ -algebra?

Budou množiny $\emptyset$ a $P=0$, celý interval a $P=1$

$$A \quad [a, b]$$

$$\Omega \setminus A \quad [-\infty, a) \cup [b, +\infty)$$

$$B = \{b\}$$

$$A \cup B = [a, b]$$

$$A_i = [a + \frac{1}{i}, b) \quad i \in \mathbb{N}^+$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} A_i = (a, b)$$

Budou patřit množiny uzavř., otevř., ^{polootevř.} libovolných typů a jejich konečná sjednocení
... velmi složitá σ -algebra

Nerávislé jevy

jevy $P(A), P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

A na předpokladu jevu B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

a pokud je stejná jako $P(A)$, jsou nezávislé

Př

Komunikační kanál, ceme 0,1, máme pravděp. 0,1,
že vypadne opačný symbol

$$P(\text{chyby}) = 0,1$$

$$P(1) = 0,4 \quad (0,1; 0,05) \quad \text{na výstupu kódujeme 1}$$

.. že na vstupu jednička

- vícš podmíněnou pravděp. vstupu, když známe výstup

A_0 .. 0 na vstupu

$$P(A_1) = 0,4 \quad (0,1; 0,05)$$

A_1 .. 1 na vstupu

$$P(A_0) = 0,6 \quad (0,9; 0,95)$$

B_0 .. 0 na výstupu

B_1 .. 1 na výstupu

$$P(B_1) = P(A_1) - P(ch)P(A_1) + P(ch)P(A_0)$$

$$= P(A_1) \cdot P(B_1|A_1) + P(A_0)P(B_1|A_0)$$

~~$P(B_1)$~~

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$P(B_1|A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)}$$

$$P(A_1|B_1) \cdot P(B_1) = P(B_1|A_1) \cdot P(A_1)$$

.. ověřet
na výpočet

pro $P(A_1) = 0,4$

$$P(A_1 | B_1) = 0,86$$

$$P(A_1 | B_0) = 6,9 \cdot 10^{-2}$$

$$P(A_0 | B_1) = 0,14$$

$$P(A_0 | B_0) = 0,93$$

pro $P(A_1) = 0,05$

$$P(A_0 | B_0) = 0,99$$

$$P(A_0 | B_1) = 0,68$$

$$P(A_1 | B_0) = 5,8 \cdot 10^{-3}$$

$$P(A_1 | B_1) = 0,32$$

PA

Na domě 6 oken, mohou a nemusí být rozsvícená,
jeon nezávislá.

Za předpokladu toho proudu do baráku $\neq$ je
pravděpodobnost rozsvícení okna $\frac{1}{3}$

Pravděpodobnost, že bude proud 0,999

- V každém okně se nesvítí - jistě pravděpodobnost,
že nebude proud

A - nesvítí

B - bude proud

$$P(A|B) = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$P(A|\neg B) = 1$$

.. není možné čím svítit

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\neg B) \cdot P(\neg B)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 0,999 + 1 \cdot 0,001$$

$$= 8,9 \cdot 10^{-2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = 0,98$$

$$P(\neg B|A) = 1 - P(B|A) = \underline{\underline{0,02}}$$

p $\neg$ bude proud

při výběru počtu oken na 20
→ pravděp., že nejde proud je 77%

PA

$$P(A) = 1$$

$$P(B) = 0$$

pro A, B nezávislé

$$P(B|A) = P(B)$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0$$

(4)

Náhodná veličina - jakékoliv ^(kalkulované) zobrazení k množ.
elementárních jevů do $\mathbb{R}$

Distribuční funkce

$$F(t) = P(X \leq t)$$

Při Am. ruletu sázení na barvu

$$P(X = \text{sudí}) = \frac{18}{28}$$

výhraje

všech 18 výherních polí lze vrát (náhodná veličina)
jako třeba +1, ostatních 20 polí -1
s příslušnou pravděp. → zjednodušený
výpočet

Př 2. ruku sázení na pole

$$P(X=36) = \frac{1}{38}$$

$$P(X=-1) = \frac{37}{38}$$

pomocí takto zvolené veličiny lze třeba určit
průměrnou výhru $36 \cdot \frac{1}{38} + (-1) \cdot \frac{37}{38} = -\frac{1}{38}$

Př Stejná data narození

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

Př

lidí a různým datem narození

to se odečte od 1

pro 23 lidí větší než $\frac{1}{2}$

Distribuční funkce

$$F(t) = P(X \leq t)$$

$$F(t) \in [0, 1]$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$$

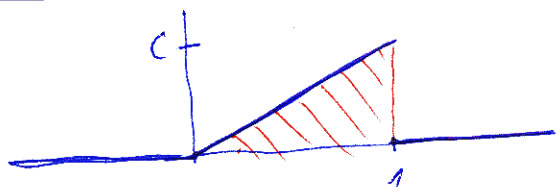
$$t_1 \leq t_2 \text{ pak } F(t_1) \leq F(t_2)$$

zprava spojitá

jestliže lze vyjádřit $F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$,
 f - hustota pravděpodobnosti pro X a X má spoj. rozdělení

$$F(t) = \sum_{\substack{x \in I \\ x \leq t}} P(X=x) \quad X - \text{diskrétní rozdělení}$$

Př.



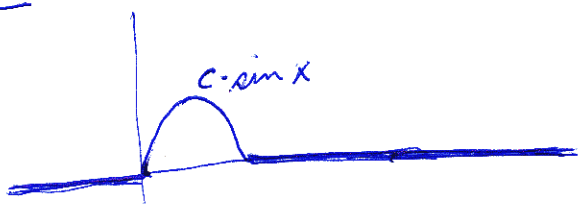
spočítat c , aby to byla skutečně hustota
 integrál x f musí být 1
 kde tedy plocha Δ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

$$\frac{c \cdot 1}{2} = 1$$

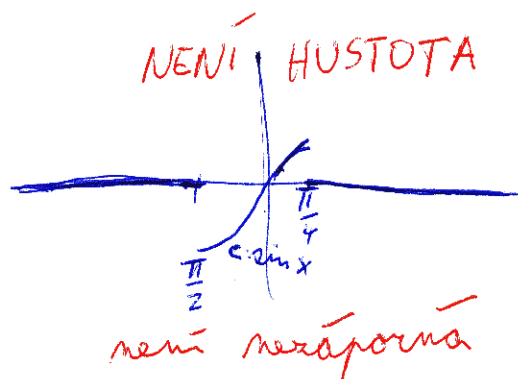
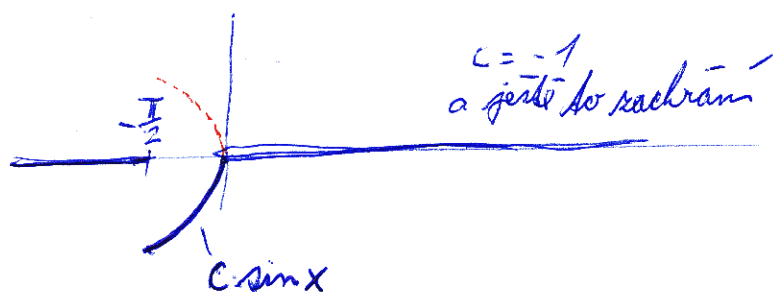
$$\underline{c = 2}$$

Př.



$$\int_0^{\pi} \sin x = -[\cos x]_0^{\pi} = 2$$

$$c = \frac{1}{2}$$



Pr

$$f(x) = C \cdot e^{-x^2 + 8x}$$

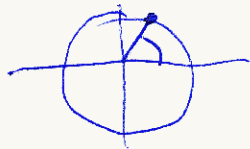
$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + 8x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-4)^2} \cdot e^{16} dx = e^{16} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

↑
znajdeme prim. fci

ke zhrnut spočítat jako dvojit. $\int$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$



$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r dr d\varphi$$

$$r^2 = t \quad 2r dr = dt$$

$$\frac{2\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi$$

$$= e^{16} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

hustota normovaného normálního
(gaussova) rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

h. normálního rozdělení

P_X hod mincí

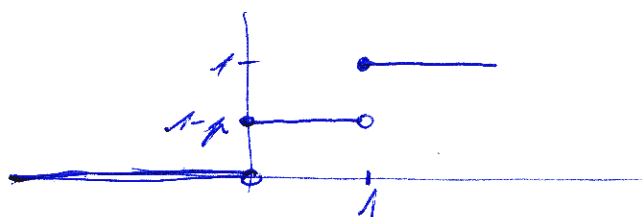
$$P(X=1) = p \quad X \in \{0, 1\}$$

Alternativní rozdělení

$$P(X \leq t) = 0 \quad t < 0$$

$$P(X \leq t) = 1-p \quad 0 \leq t < 1$$

$$P(X \leq t) = 1 \quad t \geq 1$$



• mincí m

náhodná veličina $0 \leq X \leq m$

$$7 \text{ mincí, 1 orel, } P(\text{orel}) = p \quad 7 \cdot p \cdot (1-p)^6$$

$$2 \text{ orel } \quad \binom{7}{2} p^2 (1-p)^5$$

$$m \text{ mincí} \quad P(X=k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

Binomické rozdělení

$$\sum_{k=0}^m P(X=k) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = (p+1-p)^m = 1$$

- $P(X=k) = \frac{1}{n}$
rovnomé rozdělení

byla rozpočítadlo "Enditýz..."
na předpokladu, že si nepočítám,
kde náčít :))

- $P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Poissonovo rozdělení

$$\sum_0^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_0^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

~~rovnomé rozdělení~~

- $f(t) = \frac{1}{h} \quad t \in [a, a+h]$
 $= 0 \quad t \notin$

Střední hodnota

$$EX = \sum_{i \in I} i \cdot P(X=i)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

PM

X - alternation

$$EX = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p$$

X - binomické

$$EX = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = np$$

(je to jako n * hod 1 mince)

(5)

Střední hodnota

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$EX = \sum_{i \in I} P(X=i)$$

$$f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$EX = k \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$a = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$x = \sqrt{2}\sigma a + \mu$$

$$dx = \sqrt{2}\sigma da$$

tedy

$$= k \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma a + \mu) \cdot e^{-a^2} \sqrt{2}\sigma da =$$

↳ přepočítat měří!
jde se nemění

$$= k \sqrt{2}\sigma \left(\sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-a^2} da + \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2} da \right) =$$

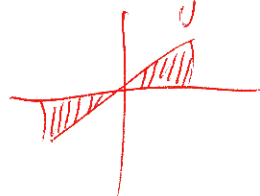
$$J = k 2\sigma^2$$

$$= \mu$$

$$= \mu + J \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot e^{-a^2} da$$

$$= 0$$

při substit -a je to
lichá fce + sym. interval
holenn nuly



Pr

náh. veličina rovnoměrné rozdělení na konečném intervalu
jeho hustota?



$$1. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$(b-a) \cdot h = 1$$

$$h = \frac{1}{b-a}$$

~~hustota~~
hustota

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad x \in \langle a, b \rangle$$

$$= 0 \quad x \notin \langle a, b \rangle$$

střední hod.

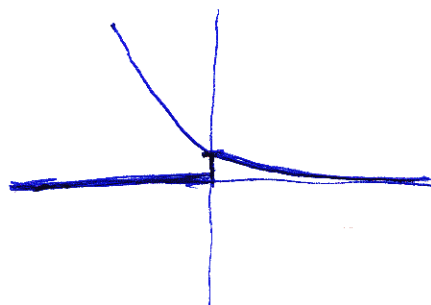
$$EX = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

Pr

exponenciální rozdělení

$$f(x) = e^{-x} \quad x \in \langle 0, \infty \rangle$$

$$= 0 \quad x \notin \langle 0, \infty \rangle$$



$$EX = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx =$$

$$\left| \begin{array}{ll} g = x & g' = 1 \\ f' = e^{-x} & f = -e^{-x} \end{array} \right|$$

$$= \underbrace{\left[-x e^{-x} \right]_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

Per Parts
správ nás

$$\int (fg)' = \int f'g + fg'$$

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$X \sim \text{Bi}(p, m)$$

$$Y_i = A(t(p)) \quad 0 \cdot P(Y_i=0) + 1 \cdot P(Y_i=1) = p$$

$$X = \sum_{i=1}^m Y_i$$

$$EX = \sum_{i=1}^m EY_i = m \cdot p$$

binom

$$EX = \sum_{i=0}^m i \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} =$$

$$i \binom{m}{i} = \frac{m!}{i! (m-i)!} \cdot i =$$

$$= m \sum_{i=1}^m \binom{m-1}{i-1} p^i (1-p)^{m-i} =$$

$$= \frac{m!}{(i-1)! (m-i)!} =$$

$$= m \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{(m-1)-j} =$$

$$= \frac{m(m-1)!}{(i-1)! [(m-1)-(i-1)]!} =$$

$$= mp \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} p^j (1-p)^{(m-1)-j} =$$

$$= mp \cdot (p + 1 - p)^{m-1}$$

binom. v.

(6)

náh. vel. X

jak se změnil distrib. fee pro Y , když $Y = h(X)$?

Př. X - "hod kostkou" - 1..6 a $P \frac{1}{6}$

$$h(t) = t - 2 \quad \text{-- adak}$$

$$Y = h(X)$$

$$Y \in \{-1, \dots, 4\}$$

$$P(Y = 1/2) = \frac{1}{6}$$

nějaká fee

P1 kostka

$$Z = k^2(X) \quad Z \in \{0, 1, 4, \dots\}$$

$$P(Z=1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Z=k) = \frac{1}{6} \quad k \neq 1$$

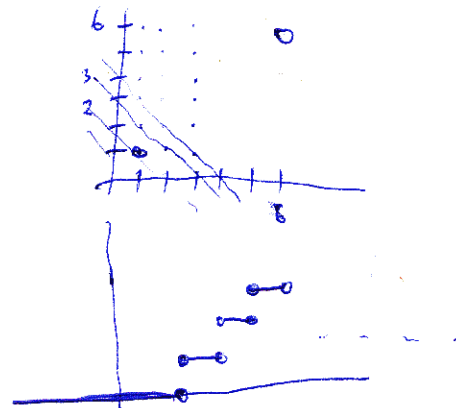
P2 X, Y - hod kostkou

$$Z = (X+Y) \quad \{2, \dots, 12\}$$

$$P(Z=2; 12) = \frac{1}{36}$$

$$P(Z=3; 11) = \frac{2}{36}$$

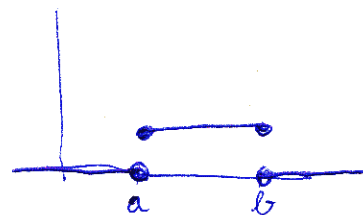
$$P(Z=7) = \frac{6}{36}$$



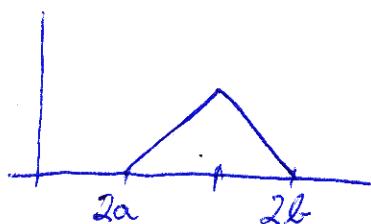
→ součet veličin s rovnoměrným rozdělením rozhodně rovnoměr. roz. nemá

P3 X, Y - rovnom. rozdel na $[a, b]$

$$Z = X + Y \quad \text{jaká hustota?}$$

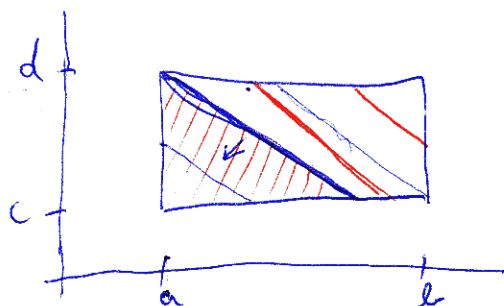


bylo
lehké
se zkusit



$$(2b-2a) \cdot \frac{h}{2} = 1 \quad \text{musí}$$

$$(b-a) \cdot h = 1 \quad !$$



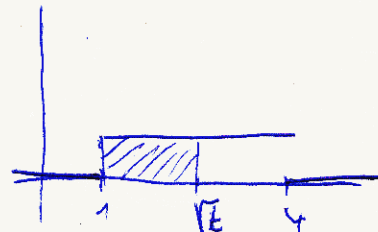
$$P(X+Y \leq t)$$

$z \rightarrow$ obsah oblasti pod
veř. diagonálou

P2

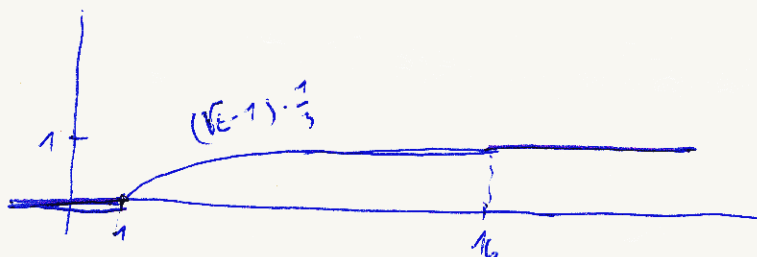
X - rovnom na $[1, 4]$

ještě rozděl $Y = h(X)$; $h(x) = t^2$



distrib.
fce
pro Y

$$P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(X \leq \sqrt{t}) = (\sqrt{t} - 1) \cdot \frac{1}{3}$$



obnovit znalosti derivace, $\int$ per partes, jednoduché substituce

P2

X - rovnom na $[-1, 2]$

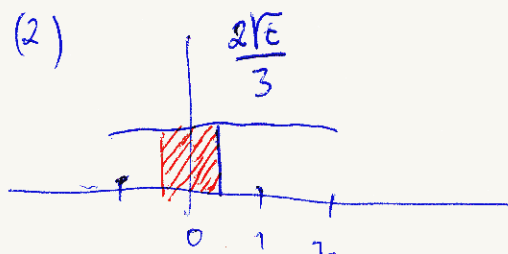
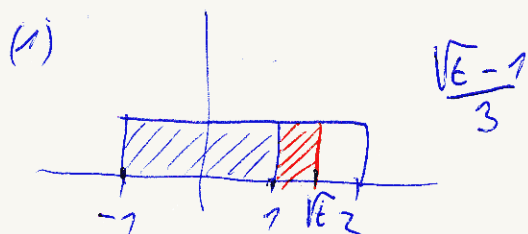
$$Y = X^2 \quad ?$$

$$P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(|X| \leq \sqrt{t}) =$$

$$x \leq \sqrt{t} \quad t \in [1, 4]$$

$$(1) \quad t \geq 1 \quad = P(-1 \leq X \leq 1) + P(1 \leq X \leq \sqrt{t}) = \frac{2}{3} + P(1 \leq X \leq \sqrt{t}) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{t}-1}{3}$$

$$(2) \quad t < 1 \quad = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = 2P(0 \leq X \leq \sqrt{t}) = \frac{2\sqrt{t}}{3}$$



kusloka (1) $-\frac{1}{3\sqrt{t}}$

(derivovat) (2) $\frac{1}{3\sqrt{t}}$

Pr X - exponenciální rozdělení na $(0, \infty)$

$$f_X(t) = e^{-t} \quad t \in [0, \infty)$$

jak rozdělení pro

$$\begin{matrix} X+2 \\ -2X \\ X^2 \end{matrix}$$

Pr X - kusloka f_X

h - prosta

$$Y = h(X)$$

kusloka f_Y

$$P(Y \leq t) = P(h(X) \leq t) = P(X \leq h^{-1}(t)) = \int_{-\infty}^{h^{-1}(t)} f_X(x) dx$$

$$f_Y(t) = f_X(h^{-1}(t)) \cdot (h^{-1}(t))'$$

• když h roste
h klesá

7

nemá střední hodnotu

normaliz. hust. $f(x) \approx \frac{1}{1+x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctg x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx \quad \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = c \int \frac{1}{t} dt = c \ln|x|$$

od sled. úhel do ∞ do ∞ ,
na druhé straně obdobně

střední hodnota neexistuje

odpovídá se rovnadlu

$$x - \text{"úhel"} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$Y - \text{"průsečík s rov. tabule"} \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(Y \leq t) = P(X \leq \arctg t) = \left(\frac{\pi}{2} + \arctg t\right) \frac{1}{\pi} \quad \text{distrib. fce}$$

$$\left(\arctg t - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

po derivaci



Pr.

(z pohledu teorie)

Kolik pokusů musíme udělat přibližně na to, abychom se kapsali do Guinnessovy knihy rekordů?

(veci typu nejvyšší skok, nejmenší pes, náhodný výběr testovaného subjektu)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \sum_{n=1}^{10^{24}} \frac{1}{n} \approx 230$$

x_i - rekord nastane ~~roku~~ v i. roce

$$P(x_1) = 1$$

$$P(x_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(x_k) = \frac{1}{k}$$

$Y_i = 1$ právě když rekord nastal v roce i

$$Y = \sum_{i=1}^m Y_i \quad \text{výčet je součet hodnot ze 2 let}$$

stejně $EY = \sum EY_i = \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \approx \ln m + \gamma$

Eulerova konst. $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} - \ln m \approx 0,58$

je nám 11 let, takže jme 3 rekordy

≈ 30

≈ 80

4

5

Čebyševova nerovnost

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad \dots \quad DX = \text{var } X = \sigma^2$$

Př 100 krát hod horkou, s pravděp. 95% holih hodim šestek
 X - počet 6 $\in \{0, 1, \dots, 100\}$

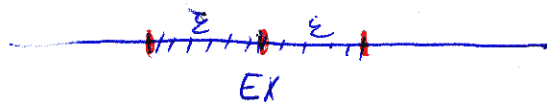
binomické rozdělení, param $100, \frac{1}{6}$

$$EX = \frac{100}{6} (= n \cdot p) = 16,6$$

rozděl

$$n \cdot p \cdot (1 - p) = 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{36} = 13,9$$

$$\frac{DX}{\varepsilon^2} = 0,05 \quad \begin{array}{l} 1-0,95 \text{ pravděp. } \geq \varepsilon \\ \text{pro } \varepsilon \end{array} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{DX}{0,05}} = \sqrt{\frac{13,9}{0,05}} = 16,6$$



s pravděp. 95% padne 0 až 33 šestek

8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

$$X_n = \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) / n \quad Y_i \in AH(\mu)$$

alternatívny

čísly

$$1 = P(|X - EX| < \varepsilon) + P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P(|X - EX| < \varepsilon) + \frac{\text{var } X}{\varepsilon^2}$$

tabuľka

príklady

$$EX_n = E \frac{1}{n} \sum Y_i = \frac{1}{n} \sum EY_i = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\text{var } X_n = \frac{1}{n^2} \sum \text{var } Y_i = \frac{\mu(1-\mu)}{n}$$

$$P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mu(1-\mu)}{n\varepsilon^2}$$

pre $n \rightarrow \infty$ ide o 0

Centrálne limitná veta

Výberový priemer $\bar{X}$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\text{var } X}{n}}} \leq t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

tabuľka má norm. normálnu rozdeľ.

$DX = \text{var } X$ - rozptyl

μ - stredná hodnota

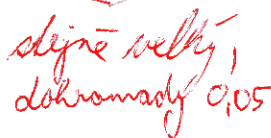
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$EX_i = \mu$$

$$DX_i = DX$$

hodnoty $\int$ - tabuľka
stačí sa skypovať
a skontrolovať

Ph



0,975 (od $-\infty$ do t)

$$t \doteq 2 \quad (1,96)$$

100 Rodin, all. recd.

$$\bar{X} = \pm \sqrt{\frac{DX}{n}} + \mu$$

horni oclad
poctu cesku

$$\sigma_u = \frac{1}{6}$$

$$n = 100$$

$$DX = \frac{5}{36} \quad (= p \cdot (1-p))$$

$$\bar{X} = 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{3600}} + \frac{1}{6}$$

polovina vel. intervalu

$$\sum x_i = 100 \cdot \left(\frac{4.6}{60} + \frac{1}{6} \right) = 17 + 7.66 \quad \text{horní}$$

$$(100 \cdot \bar{x}) \quad 17 - 7.66 \quad \text{dolní}$$

šestý v intervalu přibližně 10 až 24

při 50 až 100 pozorování na centrální lince byla dávkou téměř stejné výsledky jako přesný výpočet (o sah 74,3 %)

Pr. Hrac sázi na ruletu na jedno číslo. ^{kasina} ~~gem~~ majitel Ruleta 37 polí - při padnutí mince dává 35 mincí, jinak gem zůstal mince

Majitel kasina nechce prohrát (pravděp 95%)

náhodná veličina +1
-35

$$P(X = -35) = \frac{1}{37}$$

$$P(X = 1) = \frac{36}{37}$$

střed $EX = -\frac{35}{37} + \frac{36}{37} = \frac{1}{37}$

$$EX = \sum_{i \in I} i P(X=i)$$

rozptyl $DX = \frac{(35)^2}{37} + \frac{1^2 \cdot 36}{37} - \left(\frac{1}{37}\right)^2$

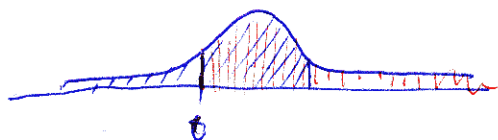
$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$\approx 34$$

0, protože kam se láme (>0 vyhrávk)

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{DX}{n}}} \leq t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

pro 0,95 $t \approx 1,64$



||| 0,95

// symetricky

$$\frac{0 - \mu}{\sqrt{\frac{DX}{n}}} = t$$

$$\frac{1}{37} = 1,6 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}}$$

$$n = (37 \cdot 1,6 \cdot 6)^2 = 160\,000$$

kolikrát ji musím roztáčet,
abych s $p = 95\%$ vyhrál
nebo také roztáčet jednou

9

10

před $X_1, \dots, X_k$ náh. veličiny s stejnou EX a DX

$$S_i = \sum_{j=1}^i X_j$$

se blíží k norm. rozdělení

Z, Y, X norm. na $[0, 1]$

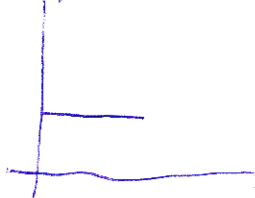
$T = X + Y$... součet

$$f_T(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot f_Y(z-t) dt = \int_0^1 f_Y(z-t) dt$$

$$0 \leq z-t \leq 1$$

$$z-1 \leq t \leq z$$

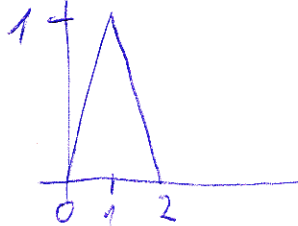
hustota pro X



$$0 \leq z \leq 1$$

$$\int_0^z dt = z$$

hustota pro $X+Y$



$$1 \leq z \leq 2$$

$$\int_{z-1}^1 dt = 1 + 1 - z = 2 - z$$

$$T = \underbrace{X+Y}_{\text{nově } X} + Z$$

$$f_T(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Z(z-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-t) f_Z(t) dt =$$

vychází z

$$P(T = z) = P(X+Z = z) = P(X=t) \cdot P(Z=z-t)$$

$$= \int_0^2 f_X(t) f_Z(z-t) dt$$

$$= \int_0^1 f_X(z-t) dt$$

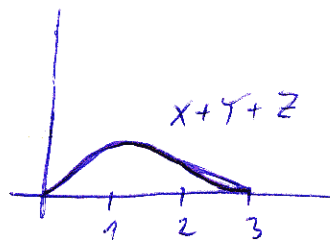
$$0 \leq z \leq 1$$

$$z-1 \leq t \leq z$$

$$1 \leq z \leq 2$$

$$= \int_0^z t dt = \frac{z^2}{2}$$

x komplikovanější



$$\int_{z-1}^1 t dt + \int_1^z 2-t dt = -\frac{z^2}{2} + 3z - \frac{3}{2}$$

$$2 \leq z \leq 3$$

$$\int_{z-1}^2 2-t dt = \frac{z^2}{2} - 3z + \frac{9}{2}$$

1. Zkouška 3 pí po 4 bodech

6 b platí se

7 b známka

méně než 5 b na nic se
nepočítá

DÚ přístě 200x hod korunou

EXPERIMENT

přes přím malý ka volbou A-L - káse
M-Z - výsledek

1 x př. káse

2 x

3

4 x

5 x

6 x

poslat nejde do patku

pouze byla výledek

metoda momentů

kontrola A

P - pravdě, že A najde chybu

B

q

- " - B - " -

AB

(obdobu)

pq

- " - AB - " -

z toho M skutečných
chyb

odhadnout celkový
počet chyb

$A \sim B_i (M, p)$

$B \sim B_i (M, q)$

$AB \sim B_i (M, pq)$

jaksi nazýváme M, p, q

známe A - nášel a chyb

B - nášel b chyb

AB - našel c chyb

okloubkem

$$EA = \hat{M} \hat{p} = a$$

$$\hat{M} \hat{q} = b$$

$$\hat{M} \hat{p} \hat{q} = c$$

$$\hat{M}^2 \hat{p} \hat{q} = a b$$

$$\hat{M} \hat{p} \hat{q} = c$$

$$\hat{M} c = a b$$

$$\hat{M} = \frac{a \cdot b}{c}$$

odhad M

Pr ~~rovnice~~ ^{rovnice} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

rovn. rozdelení [a, b]

určit ten interval - [a, b]

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\hat{m}_1 = \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) / m = 4,5 = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2}$$

$$\hat{m}_2 = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) / m = \frac{(2m+1)(m+1)}{6} = \frac{51}{2}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{(a-b)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$\frac{\hat{a} + \hat{b}}{2} = 4,5$$

$$\frac{(\hat{a} - \hat{b})^2}{12} + \frac{(\hat{a} + \hat{b})^2}{4} = \frac{51}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{a} - \hat{b})^2}{12} &= \frac{51}{2} - \frac{81}{4} \\ &= \frac{21}{4} \end{aligned}$$

$$(\hat{a} - \hat{b})^2 = \frac{12 \cdot 21}{4} = 63$$

atd

$$\hat{b} - \hat{a} = 8$$

$$\hat{a} + \hat{b} = 9$$

$$\hat{b} - \hat{a} = 8$$

$$\hat{b} = 8,5$$

$$\hat{a} = 0,5$$

namēr. 1, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 8

výjde $\hat{a} < 1$, $\hat{b} < 8$
metoda momentů dává nesmysl

příteli met mom
met maximální rovnovážnosti

X - rovnovážná $\{0, 1, 2\}$

Y - $Bi(2, \frac{1}{2})$

0 - m_0

1 - m_1 krát

2 - m_2

} směřováno
a známé

(11)

$$P(X=i) = \log\left(1 + \frac{1}{i}\right) \quad (\text{Memfordův zákon})$$

pravidlo, a jak se vyskytuje číslo začínající i
v nějakých datech

(třeba účetní data, počty úmrtí při velkých
seizmických, počty lidí v okresech USA)

data musí počítat z rozdělení od 1 do hodnoty

PA

$$Z = \text{Mix}_c(X, Y)$$

$X \sim \text{rovnomi na } 3 \quad (= \{0, 1, 2\})$

$$Y \sim \text{Bi}(2, \frac{1}{2})$$

naměřeno

$$0 - m_0$$

$$1 - m_1$$

$$2 - m_2$$

} brát

odhad pomocí met. momentů

$$EZ = cEX + (1-c)EY$$

(konvenční kombinace)

$$= c \cdot 1 + (1-c) \cdot 1 = 1 \rightarrow \text{nelze použít}$$

$$EZ^2 = cEX^2 + (1-c)EY^2 = \frac{5c}{3} + (1-c)\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{4}\right) =$$

$$= \frac{10c + 9(1-c)}{6} = \frac{9+c}{6}$$

odhad pro 2. děrný moment

$$n = m_0 + m_1 + m_2$$

$$\hat{m}_2 = \frac{m_1 + 4m_2}{n} = \frac{9 + \hat{c}}{6}$$

$$\hat{c} = 6 \frac{m_1 + 4m_2}{n} - 9$$

metoda maximální věrohodnosti

věrohod. fce

u poj. rozst. místo pravděp. hustota

$$L = \prod_i P(X=i)$$

hledáme max

$$L(c) = \underbrace{\left(\frac{c}{3} + \frac{1-c}{4}\right)^{m_0}}_{\text{pravděp. 0}} \underbrace{\left(\frac{c}{3} + \frac{1-c}{2}\right)^{m_1}}_{\text{pravděp. 1}} \underbrace{\left(\frac{c}{3} + \frac{1-c}{4}\right)^{m_2}}_{\text{pravděp. 2}}$$

$$= \left(\frac{c}{3} + \frac{1-c}{4}\right)^{m_0+m_2} \left(\frac{c}{3} + \frac{1-c}{2}\right)^{m_1} =$$

$$= \left(\frac{c+3}{12}\right)^{n-m_1} \left(\frac{3-c}{6}\right)^{m_1}$$

to je na
derivaci hrušné,
takže to logaritmujeme
(zachová vlastnost deriv.)

$$"\ln L" = (n-m_1) \ln(c+3) + m_1 \ln(3-c)$$

chybí nejdříve konst. nezajímá nás pro derivaci

$$(" \ln L ")' = \frac{n-m_1}{\hat{c}+3} - \frac{m_1}{3-\hat{c}} = 0$$

$$(3-\hat{c})(n-m_1) = m_1(\hat{c}+3)$$

$$\hat{c}(m_1 + n - m_1) = 3(n - m_1) - 3m_1$$

$$\hat{c} = 3 - \frac{6m_1}{n}$$

(pro $m_1=0$, pak $\hat{c}=1$
pro $m_1=n$, pak $\hat{c}=0$, protože musí být v $[0,1]$)

$$3 - \frac{6m_1}{n} = 0$$

$$\frac{m_1}{n} = \frac{1}{2}, \text{ pak } \hat{c} = 0$$

$$3 - \frac{6m_1}{n} = 1$$

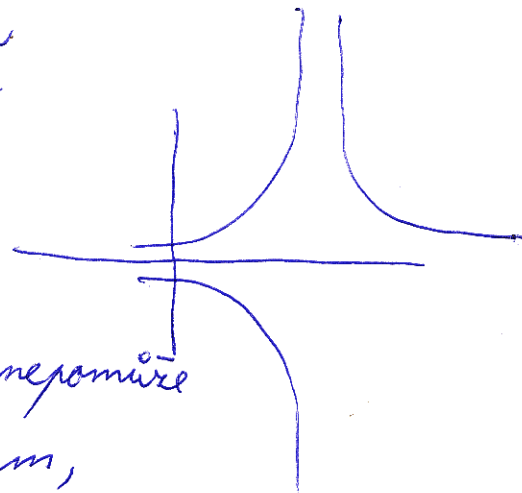
$$\frac{m_1}{n} \leq \frac{1}{3} \text{ pak } \hat{c} = 1$$

Př naměřeno 3 4 5 4 4 4 8 1

met. mom. $\hat{a} = 0,95, \hat{b} = 7,3$

předpokl. spojité rozdělení rovnoměrné

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^8 \left(\frac{1}{b-a} \right)$$



derivace nepomůže

→ použijem silný rozum,

aby zlomek $\frac{1}{b-a}$ byl největší,

tedy $b \equiv 8 \quad a \equiv 1$

$$\hat{b} = 8$$

$$\hat{a} = 1$$

$\overline{P}_H$ geom. rozdel.

$$P(X=k) = (1-\theta)\theta^k$$

i) MM

ii) MMV

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\theta)\theta^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-\theta)\theta^k - \sum_{k=0}^{\infty} (1-\theta)\theta^k =$$

$$(\theta^{k+1})' = (k+1)\theta^k$$

nepohodlné

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k = \frac{\theta - 1 + 1}{1 - \theta}$$

$$(1-\theta) \cdot \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

$$= \frac{1 - 1 + \theta}{1 - \theta} = \frac{\theta}{1 - \theta}$$

$$\hat{m}_1 = \sum x_i / m = \bar{x}$$

$$\frac{\hat{\theta}}{1 - \hat{\theta}} = \bar{x}$$

$$\hat{\theta}(1 + \bar{x}) = \bar{x}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{1 + \bar{x}}$$

MMV

n - počet x_i

$$\prod_{x_i} (1-\theta) \theta^{x_i} = (1-\theta)^n \theta^{\sum x_i} = L$$

$$\ln L = n \ln (1-\theta) + \sum x_i \ln \theta$$

$$0 = (\ln L)' = -\frac{n}{1-\theta} + \sum x_i \cdot \frac{1}{\theta}$$

$$\bar{x} = \frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}}$$

dává stejný výsledek jako MM
(také pro norm, Poisson, ... rozdělení)

Testování hypotéz

~~přes~~

$$H_0: \mu \geq 1 \text{ pivo}$$

$$H_0: \mu \leq 1 \text{ pivo}$$

} $\approx$ jednéh dat lze mít různé výsledky

$x_1 \dots x_n$

nulová

H_0

$$\mu = x_0$$

alternativní

H_1

$$\mu \neq x_0$$

hyp.

$$\left(\begin{array}{l} \geq x_0 \\ \leq x_0 \end{array} \right)$$

$$\frac{\bar{x} - x_0}{\sqrt{\frac{\theta^2}{n}}} = N$$

$$N > N_{1-\alpha/2} \quad (1-\alpha)$$

výsledek $\rightarrow$ zamítnutí hyp.
ne $\rightarrow$ nezamítnutí

12

Testování hypotéz

2 hypotézy - nulová - potvrzujeme, zamítáme
je možné, že se data chovají podle daného roz.

Pr. 1) 243,2 ; 244,8 ; ... ; 252,7 $n = 14$

2) 250,4 ; 250,2 ; 251,1 ; ... ; 251,1 $n = 7$

a) je rozumné předpokládat, že v 1) byli autoři
250 g čaje i v 2)

b) je rozptyl $> 1g$?

c) Zmenšil se rozptyl po seřazení ?

1) $H_0 : \mu = 250$

$H_1 : \neq$

$\bar{x} = 250,34$

$$N = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \leftarrow \text{máme rozptyl}$$
 kv. norm. rozdel

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = 0,38$$

*kvantil
studentova
rozdeleni*

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = 10,5$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(13)} = 1,77$$

*slupni
volnosti*

$T \neq t \rightarrow$ hypotézu zamítáme

$$b) H_0 : \sigma^2 \leq 1$$

$$H_1 : \sigma^2 > 1$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = 140$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(n-1) = 23$$

chi-kvadrát
ka platnosti H_0 má χ^2 rozdělení
o $n-1$ st. volnosti

> zamítáme
nulovou hypotézu

$$c) H_0 : \sigma_0^2 \geq \sigma_1^2$$

$$H_1 : \sigma_0^2 < \sigma_1^2$$

$$S_0^2 \geq S_1^2$$

$$S_0^2 < S_1^2$$

$$F = \frac{S_0^2}{S_1^2}$$

tak, aby $F \geq 1$

$$F = \frac{S_1^2}{S_0^2}$$

$$S_0^2 = 10,5$$

$$S_1^2 = 0,35$$

$$F = 27$$

s kritickým F -rozdělením
st. vol. měř. 1-1 a měř. 2-1

$$F \geq f_{1-\alpha}(n-1, m-1) = 4$$

$$d) H_0: \mu_0 = \mu_1$$

$$H_1: \neq$$

na platnosti H_0 má Troz.
když bychom prohodili hypotézu,
nic takového nevíme

jak vypadají práce
např. přehy busen

14

	x	y
1	10	8
2	11	12
3	10	9
4	9	8
5	11	8
6	9	9
7	10	10

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$

$$H_1: \neq$$

$$\hat{\mu}_x = 10$$

$$\hat{\mu}_y = 9$$



tabulka nejde se
postupuje

$$S_x^2 =$$

$$S_y^2 =$$



$$S^2 =$$

Tabulka se ale používá - měření pochází z norm. rozdel

- rozptyly jsou shodné

větrina nedělá rozdíl
na shodnost rozptylů

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$

$$H_1: \neq$$

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

s kvantilem F rozdel
se 2 stupni volnosti

$$S_x^2 > S_y^2$$

tento postup vhodný i při různých počtech měření

při stejné velikosti souborůch měření
stačí test, že jsou nezávislé
→ párový test

$$z = x - y$$

2

$$H_0: \mu_z = 0$$

-1

$$H_1: \neq$$

1

1

3

T

student. s přísl. stupněm
volnosti

0

0

PX

data x, y

$$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$

$$H_1: \neq$$

$$T = \frac{\hat{\sigma}_x^2 - \hat{\sigma}_y^2}{\sqrt{((m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2)}} \cdot \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}$$

za předpokladu platnosti H_0 má studentova
rozdíl $m+n-2$ s. vol.
- data musí mít stejné rozptyly

final

Cochrane-Cox test

$$v_x = \frac{S_x^2}{n} \quad v_y = \frac{S_y^2}{n}$$

$$S = \sqrt{v_x + v_y}$$

$$T^* = \frac{\hat{\mu}_x - \hat{\mu}_y}{S}$$

$$t^* = \frac{v_x t_{1-\alpha}(n-1) + v_y t_{1-\alpha}(n-1)}{v_x + v_y}$$

H_0 zamítáme, když $|T^*| \geq t^*$

Aspin-Welch

$|T^*| \geq t_{(1-\alpha)}(f)$ zamít.

$$f = \frac{S^4}{\frac{v_x^2}{n-1} + \frac{v_y^2}{n-1}}$$

Satterthwaite

$$h = \frac{S^4}{\frac{v_x^2}{n+1} + \frac{v_y^2}{n+1}} - 2$$

Zamítáme H_0 , když

$$|T^*| \geq t_{(1-\alpha)}(h)$$

7.2 výnosy jiných krmivových polí

x	5,7	5,5	4,3	5,9	5,2	5,6	5,8	5,7
y	5,0	4,5	4,2	5,4	4,4			

je lepší krmivo lepší?
 $H_0: \mu_x = \mu_y$

$$m = 8, \quad n = 5$$

$$\bar{x} = \hat{\mu}_x = 5,39$$

$$s_x^2 = 0,27$$

$$s_y^2 = 0,24$$

$$\bar{y} = \hat{\mu}_y = 4,7$$

$$T = 2,37$$

$$t_{0,95}(11) = 2,2$$

Cochran-Cox

$$t^* = 2,606$$

$$T^* = 2,405$$

nezamítá H_0

Aspin - W

$$t_{0,95}(9,04) = 2,26$$

zamítá H_0

Satterthwaite

$$t_{0,95}(11,09) = 2,2$$

zamítá H_0

$\bar{P}_i \sim \chi^2$ rozděl

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



a počítáme četnosti v jednotlivých intervalech

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
světlo	M	100	101	98	99	101	101	100	100	100	99	98	97	- počítání k rovnosti n
narození	N	100	95	105	115	120	100	100	90	70	100	90	90	- nepočítání - n
snážky	S	110	120	100	90	100	60	70	70	100	100	120	0	

leop $P_i = \frac{1}{12} \quad i = 1, \dots, 12$

kor. četnosti $np_i = \frac{1194}{12} = 99,5$

$n = 1194$

vždy by teor. četnosti měly být větší než 5, jinak slučoval třídy

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{12} \frac{(O_i - np_i)^2}{np_i}$$

porovnává s kvantilem
o k-1 stup. vol.

Neparametrické testy

10 lidí se ptal, za jak dlouho uplyne minuta

X 53 48 45 55 63 57 66 56 50 58

předp: μ je rovna medianu, výsl symetricky,
porov s med.

$X - \mu_0$ -7 -12 -15 -5 3 -9 6 -4 -10 -2

uspoř podle abs k.

-2 3 -4 -5 6 -7 -9 -10 -12 -15

R_i^+ .. pořadí kladné hodnoty x_i | R_i^- obdobně

$$R_3^+ = 2$$

$$R_6^+ = 5$$

- jestliže stejné hod, třeba +3, -3,
tak pořadí aritm průměr pořadí
- shodné hodnoty shazují

$$S^+ = \sum R_i^+$$

$$S^- = \sum R_i^-$$

$$H_0: \mu_0 = 60$$

Welch

$$W = \min(S^+, S^-) \leq w_{1-\alpha}(n), \text{ pak zamítám } H_0$$

$$\left(S^+ + S^- = \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$W = \min \begin{matrix} S^+ & S^- \\ (7, 48) \end{matrix}$$

$$w_{0.95}(10) = 8$$

Zamítám H_0 hyp, že lidé ví,
co je minuta