

Martin Kácer

<http://server.felk.cvut.cz/courses/36TI/xkacer/>
(X36TIN)

xkacer@felk.cvut.cz

body - víření 40 bodů

1 na každé víření / asi 12

12 b. na testiky asi 4, co se dělalo

10 b. sem. práce

6+ b. aktivita

60 prouška

<http://pitbul.wz.cz>

množiny

$$A \setminus B$$

$A \oplus B$ prvky, které nepatří do obou

doplňek k A - všechny prvky, které do A nepatří ($\neq$ univerza)

rozklad množiny - rozdělení na více množin, by

- navzájem disjunktní

- sjednocení je pův. množ.

(každý prvek právě do jedné)

2^A mocninná množina = množina všech podmnožin

$A \times B$ množina všech uspořádaných dvojic, kde 1. prvek $\in A$,
druhý $\in B$

Důkaz

Dokazujeme nějaké tvrzení ;)

$$\underbrace{(A \cap B) \subseteq A}_{\text{I}} \subseteq \underbrace{(A \cup B)}_{\text{II}}$$

$$\text{I } (A \cap B) \subseteq A$$

i

prvky, které
 $\in A$ a zároveň $\in B$

$\forall x: x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$ a def. podmnožiny
to dokazujeme

$$\forall x: x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A$$

$\forall x: x \in A \text{ and } x \in B \Rightarrow x \in A$ a def. průniku

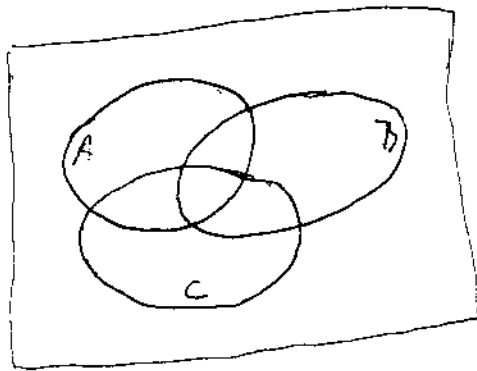
$$\text{II } A \subseteq (A \cup B)$$

$$\forall x: x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$$

$$(A \cup B) = \{x: x \in A \text{ or } x \in B\}$$

- $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

rozložit na 2 množiny, kdy prvek je v $\bar{A}$ či A , jedné...
všech množinách



a z definice uvažovat,
jestli je ^{ne} na pravé/levé straně

prvek v $\bar{A}$ ✓

prvek v A , jinde ne
 $\bar{B}$

$\bar{L}$ část není, P část není ✓
 L část není, P část není ✓

Matematická indukce

$$\forall m \in \mathbb{N} : S(m)$$

1) $S(0)$

2) $\forall m \in \mathbb{N} : S(m) \Rightarrow S(m+1)$

$$\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^m \frac{i(i+1)}{2} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

$S(m)$

1) $S(0) \quad \sum_{i=0}^0 \frac{i(i+1)}{2} = \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{6}$

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0 \\ P = 0 \end{array} \right\} L = P$$

$$2) \quad \forall m \in \mathbb{N} : S(m) \Rightarrow S(m+1)$$

$$\sum_{i=0}^m \frac{i(i+1)}{2} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \Rightarrow \sum_{i=0}^{m+1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$$

$$L = \sum_{i=0}^m \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} + \frac{3(m+1)(m+2)}{6} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} = P \quad \checkmark$$

Doma

$$\sum_{i=0}^m 2^i = 2^{m+1} - 1$$

$$\sum_{i=1}^m i^3 = \frac{m^2 \cdot (m+1)^2}{4}$$

$S(m)$

$\forall$ množiny M čísel platí, že

$$\forall x, x_2 \in M : x_1 = x_2$$

$$1) \quad S(1) : \text{OK}$$

$$2) \quad \forall m \in \mathbb{N} : S(m) \Rightarrow S(m+1)$$

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}}_{\text{finite posov.}} \quad \text{OK.}$$

$$\text{finite posov.} \quad \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_m}_{\text{finite posov.}}$$

1)

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$1) \sum_{i=0}^0 2^i = 2^1 - 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

$$2) \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^m 2^i = 2^{m+1} - 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{m+1} 2^i = 2^{m+2} - 1$$

$$L = \sum_{i=0}^m 2^i + 2^{m+1} = 2^{m+1} - 1 + 2^{m+1} = 2 \cdot 2^{m+1} - 1 = 2^{m+2} - 1 = P \quad \checkmark$$

$$2) \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1) \sum_{i=1}^1 i^3 = \frac{1 \cdot (1+1)^2}{4}$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

$$2) \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^m i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m+1} i^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$L = \sum_{i=1}^m i^3 + (m+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(m+1)^3}{4} = \frac{(m+1)^2(m^2+4m+4)}{4} = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} = P \quad \checkmark$$

(2)

Relace - podmnožina kartézského součinu

$\subseteq$

$$\langle -2, 5 \rangle \in \subseteq$$

$$\langle 3, 1 \rangle \notin \subseteq$$

$$-2 \leq 5$$

$$aRb$$

- reflexivní pro $\forall a \in A : aRa$
např. rovnost, být podmnožinou

- symetrická $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$
př. rovnost, být sousedem

- transitivní

$$\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

$$\text{př. } \subseteq, a/b$$

- antisymetrická $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$
tedy pokud aRb , není bRa

$$\text{př. } <$$

uspořádání - relace transitivní, reflexivní, antisymetrická
 $\text{př. } \subseteq, a/b$

úplné uspořádání ^(lineární) - pro ~~každý~~ ~~pro~~ jakákoliv dvojici prvků
je uspořádatelná
např. $\leq$

minimální prvek - není žádný, který je menší

nejmenší prvek - je menší než všechny ostatní

a/b na ~~reap. č.~~ ^{reap. č.} nejmenší = minimální = 1

a/b na ~~mn. čísel~~ ^{mn. čísel} > 1 - nejmenší není, minimální - všechna
prvocísla

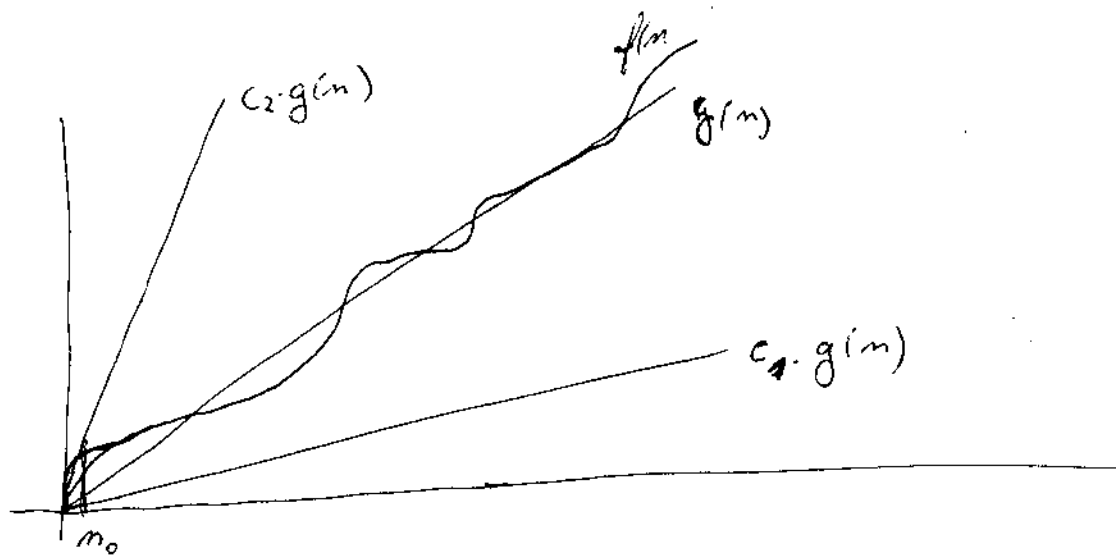
Zobrazení - relace, kde pro každý prvek $a \in A$
existuje maximálně jeden prvek $b \in B$,
že $a R b$
- předchodím prvek a vrátí nějaký prvek

Rychlost programu

- rychlost prostředí (HW, OS...)
- množství dat - udáme dobu běhu jako funkci
- struktura dat - většinou udáme krovní
nejhorší případ

n	10	20	30	50	100	1000	10 000	10 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	10^9
$\lg n$	3	4	5	5,5	6,5	10	13	16,5	~ 20	~ 23	~ 27	~ 30
$n \cdot \lg n$	30	80	150	275	650	10 000	130 000	$1,6 \cdot 10^6$	$20 \cdot 10^6$	$230 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^9$	$30 \cdot 10^9$
n^2	100	400	900	2500	10 000	$1 \cdot 10^6$	$100 \cdot 10^6$	$10 \cdot 10^9$	10^{12}	$100 \cdot 10^{12}$	$10 \cdot 10^{15}$	10^{18}
n^3	1000	8000	27 000	125 000	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	...	...
n^4	10 000	$160 \cdot 10^3$	$810 \cdot 10^3$	$6,25 \cdot 10^4$	$100 \cdot 10^6$	10^{12}	$10 \cdot 10^{15}$	$100 \cdot 10^{18}$	10^{24}	...	...	...
2^n	~ 1000	$\sim 10^4$	$\sim 10^9$	$\sim 10^{15}$	$\sim 10^{30}$	...	...	...	...	...	...	...
$n!$	$3,6 \cdot 10^6$	10^{12}	10^{32}	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n^n	$10 \cdot 10^9$	$\sim 10^{40}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

3



$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ iff } \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0:$$

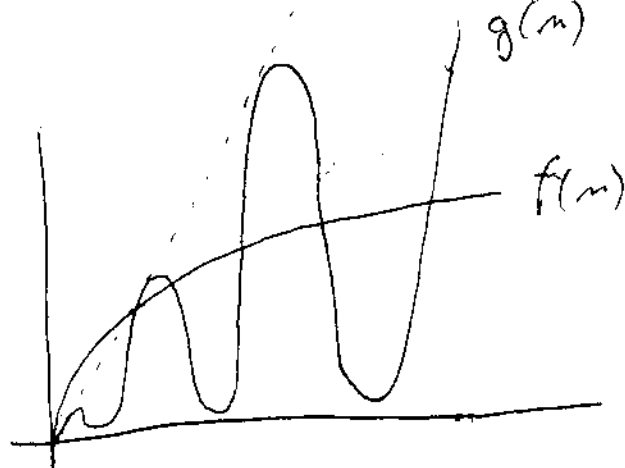
$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

$$f(n) = O(g(n)) \text{ iff } \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

$$0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$$

je to usporádání



bylo neporovnateľné

n algoritmi není
moc časté

$$3n^2 - 7n + 5 = \Theta(n^2 + 1)$$

dokázat

podle def: $\exists c_1, c_2 > 0, n_0 > 0: \forall n \geq n_0: 0 \leq c_1(n^2 + 1) \leq 3n^2 - 7n + 5 \leq c_2(n^2 + 1)$

$$0 \leq c_1 n^2 + c_1 \leq 3n^2 - 7n + 5 \leq c_2 n^2 + c_2 \quad | : n^2$$

$$0 \leq c_1 + \frac{c_1}{n^2} \leq 3 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2} \leq c_2 + \frac{c_2}{n}$$

$n_0 = 7$
 $c_1 = 2$
 $c_2 = 4$

voleno

děle ≤ 1

$\geq 2 + \text{neco}$
 ≥ 2

a podobně c_2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \begin{cases} 0 & \Rightarrow f(n) = O(g(n)) \\ x > 0 & \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n)) \\ +\infty & \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

neplatí opačně

$$D: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \forall x > x_0 : -\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon \quad | \cdot g(x) \quad \text{kladně}$$

$$-\varepsilon g(x) < \boxed{f(x)} < \varepsilon g(x) \quad \text{kladně}$$

$$f(n) = O(g(n))$$

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0 \quad 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \text{so sání}$$

když $n \geq x_0$

$c = 1$ ~~nejde~~ ~~pro~~ volíme, protože platí pro všechna $\varepsilon > 0$

$$m_0 = \max(\lceil x_0 + 1 \rceil, 1)$$

x_0 zaokrouhlený nahoru

transitivita

$$\left\{ \begin{array}{l} f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 : 0 \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \\ \text{a zároveň} \\ g(n) = O(h(n)) \Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_2 : 0 \leq g(n) \leq c_2 \cdot h(n) \quad | \cdot c_1 \\ \rightarrow f(n) = O(h(n)) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot h(n) \end{array} \right.$$

$$0 \leq f(n) \leq c_1 g(n) \leq c_1 c_2 \cdot h(n)$$

$$c = c_1 c_2$$

$$n \geq n_1 \quad \text{a}$$

$$n \geq n_2$$

$$n_0 = \max(n_1, n_2)$$

(co roste asympt rychleji) $\lg(n!)$ nebo n^2

$$\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$$

$$n^{1/2} \leq n! \leq n^n \quad \uparrow$$

$$\frac{n}{2} \lg n \leq \lg(n!) \leq n \lg n$$

graf - množ. uzlů
- množ. hran

- incidence - ~~ob~~ zobrazení, které každé hraně
přivádí neuspořádanou dvojici uzlů

smýšl

izolovaný uzel

rovnoběžné hrany

úplný graf - mezi každou dvojicí uzlů hrana

diskrétní graf - nemá hrany

podgraf - je graf - množ. uzlů je podmnož. piv. grafu
- hran " "

- zachována incidence

sjednocení grafů

průnik g.

disjunktní

hranově disjunktní

rozdíl grafů $G \Delta H = (G \cup H) - G \cap H$

$G - H = (G \cup H) - H$ minimální

doplňkový graf - rozdíl mezi úplným a tímto grafem

stupeň uzlu - počet hran incidentních s uzlem

source uzlu

TEST 14 dní

(4)

Prístě kessik - 3 otázky po bodu, to co jsme brali do teď
 třeba něco definovat...
 návrhy na semestrální práce na webu - ~~na~~ něco si vybral

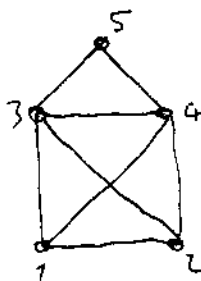
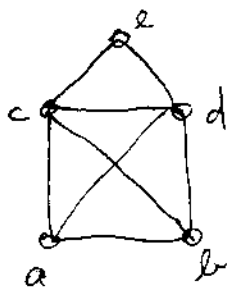
+ možná izomorfismus

Izomorfismus

grafy stejně, když mají stejné množiny uzlů, hran, incidence

grafy izomorfní, když mezi nimi izomorfismus -
 - zobrazení - bijekce, že každému uzlu přiřadí
 uzel a každé hraně hranu a zachová
 incidence

$a \leftrightarrow 2$
 $b \leftrightarrow 1$
 $c \leftrightarrow 3$
 $d \leftrightarrow 4$
 $e \leftrightarrow 5$



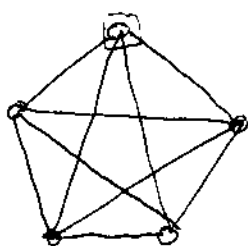
$a \leftrightarrow 1$
 $b \leftrightarrow 2$
 $c \leftrightarrow 4$
 $d \leftrightarrow 3$
 $e \leftrightarrow 5$

$a \leftrightarrow 1$
 $b \leftrightarrow 2$
 $c \leftrightarrow 3$
 $d \leftrightarrow 4$
 $e \leftrightarrow 5$

$a \leftrightarrow 2$
 $b \leftrightarrow 1$
 $c \leftrightarrow 4$
 $d \leftrightarrow 3$
 $e \leftrightarrow 5$

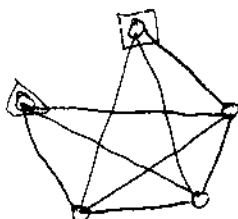
Kolik různých izomorfismů existuje? (oblibená otázka)

K_5

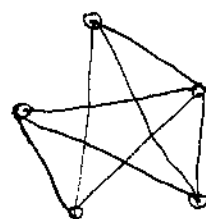


5.4.3.2.1

$K_n \dots n!$ různých izomorfismů



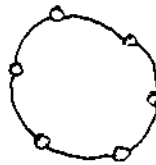
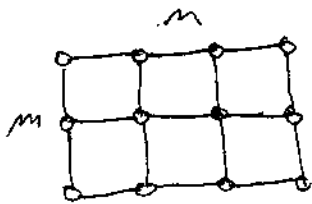
$K_n \dots 2 \cdot 1 \cdot (n-2)!$



promysleš

nebo

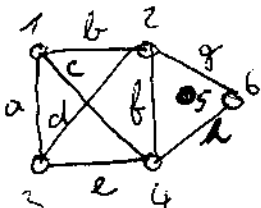




$2m$

Určete nejenom izomorfní - různý počet hran, velikosti
- různý soubor stupňů

Reprezentace grafů



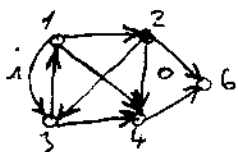
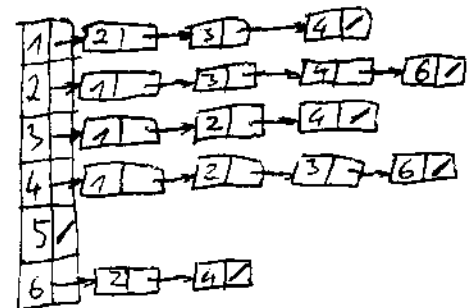
mat. sousednosti

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	1	0	1	1	0	1
3	1	1	0	1	0	0
4	1	1	1	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	1	0	0

mat. incidence

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1	1	0
3	1	0	0	1	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1	1	0	1
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	1

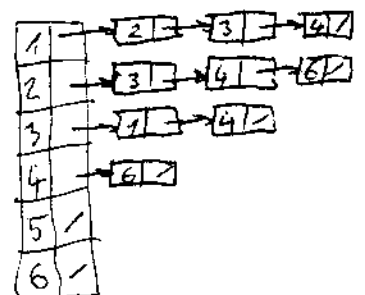
spojová reprezentace



vstupní/výstupní stupeň
symetrická orientace - všechny hrany
obousměrné

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	0	0				
3	1					
4	1					
5	0					
6	0					

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1									1
2									0
3									-1
4									0
5									0
6									0



hrany z řádků do sloupců

	sousednosti V	incidence A	spojová
paměť	$\Theta(V ^2)$	$\Theta(V \cdot A)$	$\Theta(V + A)$
stupen 1 uzel	$O(V)$ všechny řádky, sloupce	$O(A)$ počítá 1-1 v řádku	$O(V + A)$ vychází snadno, vstupní profil všechny
stupně všech uzlů	$O(V)^2$ stejně pro každý uzel	$O(V \cdot A)$	$O(V + A)$ vstupní pro všechny při 1 průchodu výstupní - všechny seznamy kódování počítačového pole

Často výhodně uložit si více informací kvůli
lepší časové složitosti

Neorientovaný graf

sled - posloupnost ~~uzlů~~ uzel - hrana - uzel - ... - uzel,
hrany incidentní s kolem psanými uzly

šah - sled, ve kterém každá hrana max jednou

cesta - šah, ve kterém se neopakuje žádný uzel kromě toho,
že počáteční je stejný s koncovým

krávnice - cesta, poč. uzel stejný s koncovým

Orientovaný graf

sled - posloupnost uzel - h. - uzel - ... - uzel, každé na svých

spojení (orientované) - sled, který respektuje orientaci hran

(orientovaný) šah

(orientovaná) cesta

cyklus - orientovaná uzavřená cesta

Souvislý graf - mezi jakoukoliv dvojicí uzlů existuje sled

Komponenta grafu - takový podgraf, který je souvislý a maximální

Líná souvislost (u06) - mezi každými 2 uzly spojení

(5)

Zobrazení - relace, každému prvku přiřadí nejvýše jeden obraz

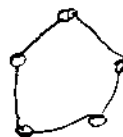
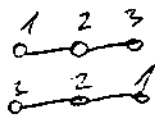
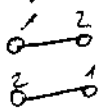
totální

surjektivní

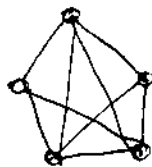
injektivní

bijekce - totální, surjektivní, injektivní

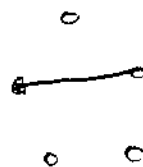
izomorfismus



$2n$

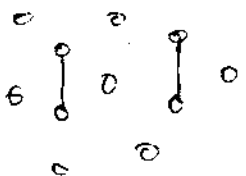


doplň $\rightarrow$

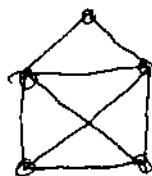


$2 \cdot (n-2)!$

doplň



h

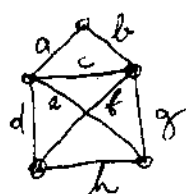


K_5 bez 2 hran

$8 \cdot (n-4)!$

- rozklad množiny
rozčlenění na navzájem disjunktní části,
jejichž sjednocení dá pův. množinu

- pokryší - rozklad množiny hran na třídy,
ke každou třídu lze pokrýt jedním šalem
př. pokryší

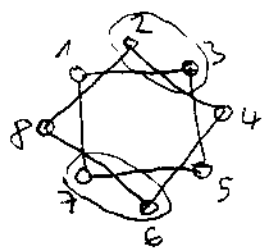


$\{\{a, b, c\}, \{e, h, f\}, \{d\}, \{g\}\}$

minimální pokryší

$\{\{e, c, f, d, a, b, g, h\}\}$

nezávislá množ. uzlů - žádná dvojice uzlů z ní
neinciduje s žádnou hranou

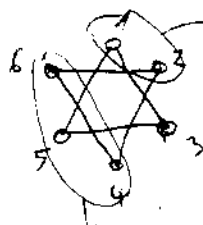


př. maximální nezáv. množ. uzlů

dominující podmnož - sjednocením dané podmnož
s množ. jejích sousedů dostaneme pův.
množinu uzlů

$$\bar{u} \subseteq u \text{ je dom} \Leftrightarrow \bar{u} \cup \Gamma(\bar{u}) = u$$

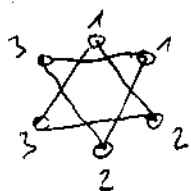
př.



některá

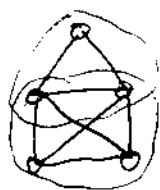
minimální

barvení grafu



chromatické číslo

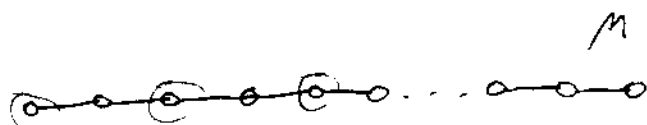
klika - maximální úplný podgraf



2 kliky

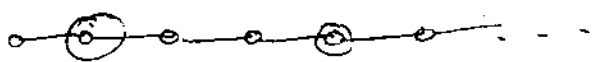
klikovost 4

klikovost - vel. max. kliky



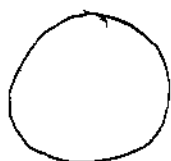
min. pokrytí - jednod. třída
nezávislost $L \cong \mathbb{Z}$

dominance $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ - stačí každý třetí



chrom. číslo 2

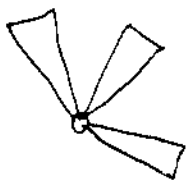
klikovost 2



klikovost 2, ale i 3

(špek do rozstřelu





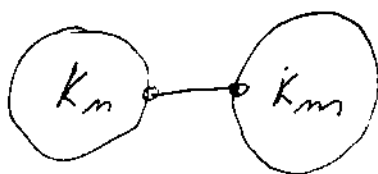
$n \geq 2$ (počet listů uzelu)

klikovost 3

chrom 3

dominance 1

nezávislost n



m, n liché

- všechny uzel kromě spojujících
sudý stupeň $\rightarrow$ celé jednotným kladem

dominance - 2 - dvojice, 1 v K_m , druhý v K_m

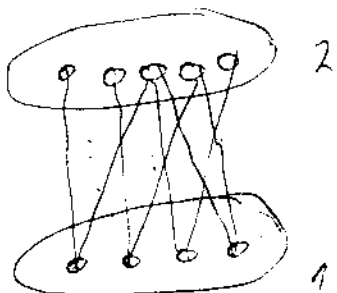
nezávislost 2 - podobně, kromě spojnice

chrom. č. - $\max(m, n)$

klikovost - $\max(m, n)$

- bichromatický (bipartitní) graf - má $\chi=2$

úplný bipartitní graf



$K_{m,n}$ - všechny možné hrany

dominance $\min(m, n)$

nezávislost $\max(m, n)$

chrom č - 2

klikovost - 2

6

Vzdálenost - délka nejkratší cesty

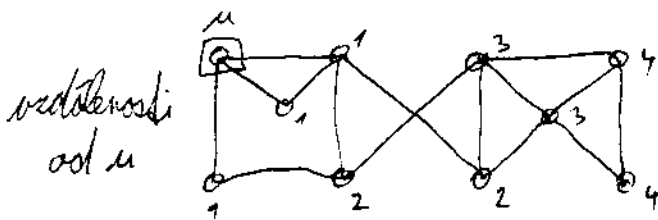
$d(u, v)$ OG - délka nejkrat. orient. cesty / spojení

- neráporná
- Δ nerovnost
- symetrie

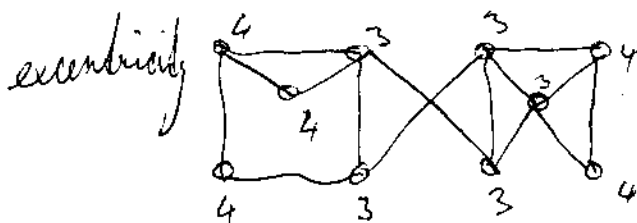
Excentricita

~~$e(u, v)$~~ $e_{G, u} = \max_{v \in V} d(u, v)$

pro každý $v \in V$ vzdálenost od u ,
je to ta největší



$e_{G, u} = 4$



$V = 3 \quad T = 4$

Maximální excentricita - PRŮMĚR

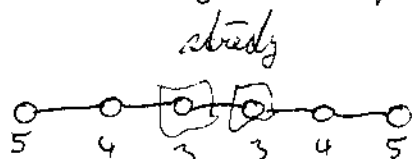
$T_G = \max_{u \in V} e_{G, u}$

Minimální excentricita - POLOMĚR

$V_G = \min_{u \in V} e_{G, u}$

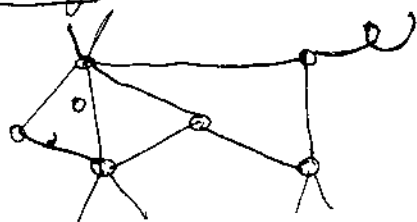
cesta v G může
být delší než
jeho průměr

$\text{Střed}(G)$ - uzel(y) s nejmenší excentricitou



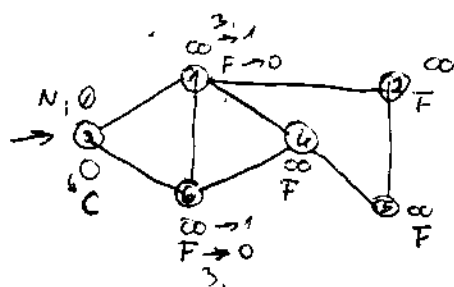
krávnice o n uzlech - n středů

Prohledávání
- do šířky BFS



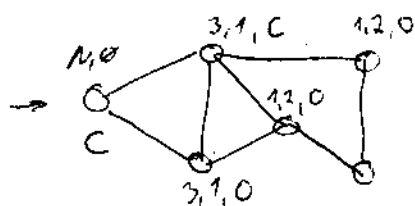
(Prasečinky)

všechny uzly kromě začátku prohl
ne Fresh a zedat ∞



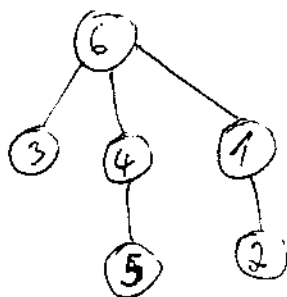
fronta

X	1	6	
---	---	---	--



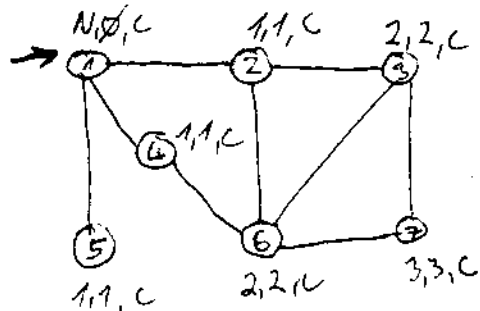
X	X	6	2	4
---	---	---	---	---

až projdem a zavřem všechny uzly
vznikne strom nejkratších cest

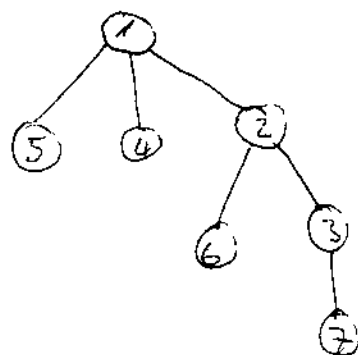


(pro prohl od uzlu 6)

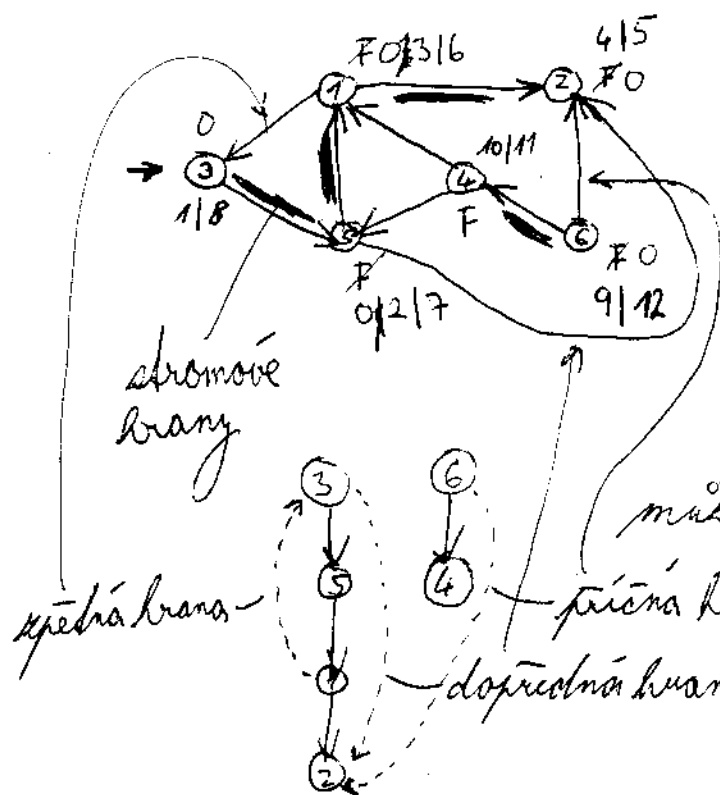
pr.



X, X, X, X, X, X, X



- do klaučky DFS

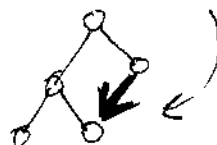


miesto franc. kasovník
(bývalá jeho rekurse)
+ časová raziska odeviení
a praviení náli

make vibrant les

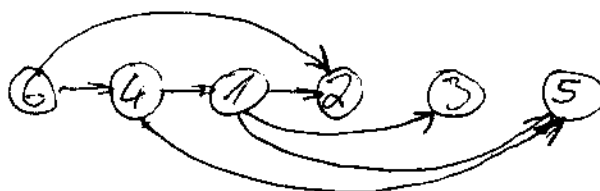
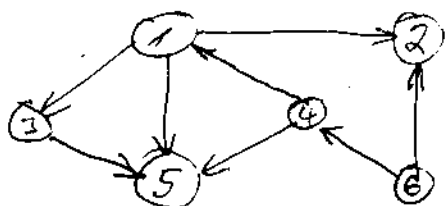
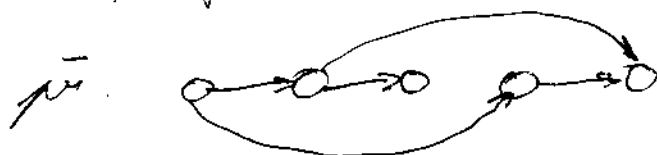
- pŕichodná hrana - medzi stromy, nebo

mezi větvemi stromu



Topologické uspořádání

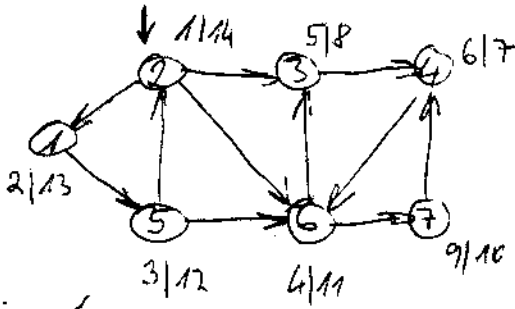
graf lze nakreslit tak, že všechny strany
vedou jedním směrem



Možnosti, jak orientovat $K_m - 2^{(2)}$

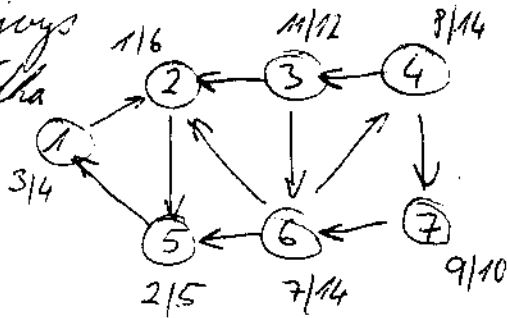
a aby byl výsledek azyklický - lze tedy topologicky upravit - n! možností

①

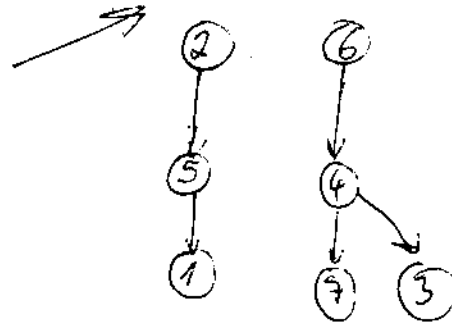


dotēnā orientāce

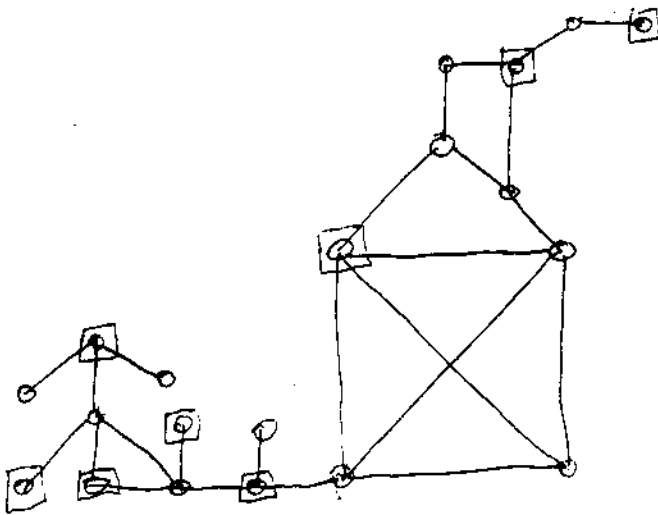
kāc ocl neļūvš
cas rakstā



silnē komponente



⑦

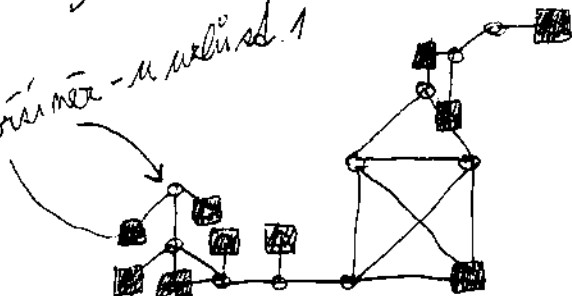


□ maximālā perāv.
mācība
(nējaka)

max. perāv. mē.

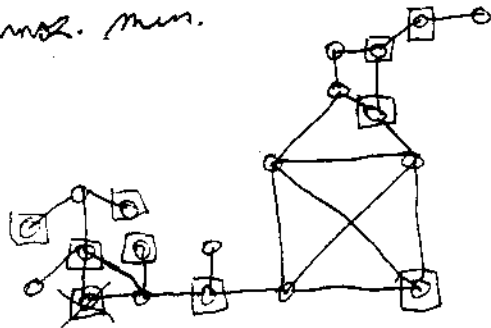
- s. nevēstīm mēnēm pātem prokū
vērēt oļecē nēnī krīviālmī

nēnī kōvī nēnī - n. mēlīsd. 1

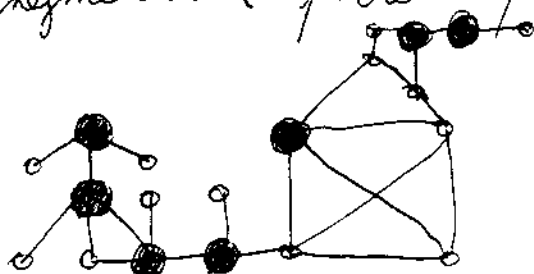


nezāvislos 1 grafu
 $\alpha = 10$

dominanci / množ. min.
nejatá



- s nejmenším počtem vrcholů



dominance

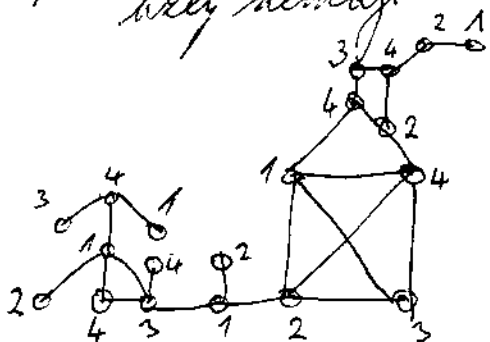
$$B = 7$$

klika - maximální úplný podgraf

- sa největší - klikovost $\omega = 4$

barvení grafu

přirození kardinální uzlu barvu, že sousední
uzly nemají stejnou



obvykle hledáme
s nejmenším počtem barev
určitě aspoň jako
klikovost

chromatické číslo

$$\chi = 4$$

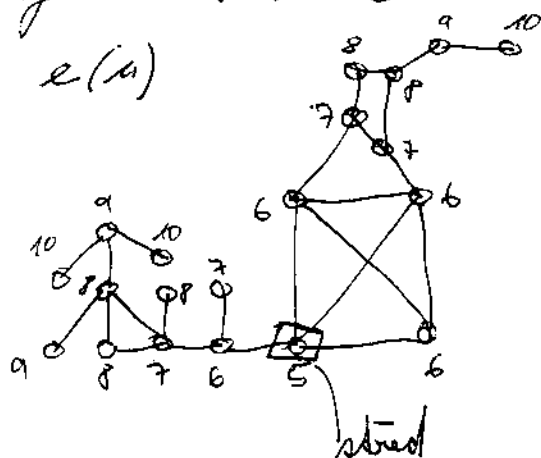
- délka cesty

- vzdálenost - délka nejkratší cesty

- průměr - největší vzdálenost, která se dá v grafu najít

$$T = 10$$

eccentricita (~~největší~~ uzlu) - největší vzdal. k
jinému uzlu

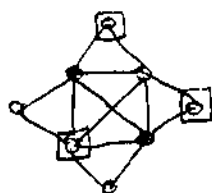


poloměr - nejmenší eccentricita

$$\kappa = 5$$

střed - uzel/y s nejmenším poloměrem

$$\alpha \geq \beta$$



max. nezáv. mn. je dominantní

- nezávislost je rovna klikovosti doplnku a naopak
(max. nezáv. mn. se stane klikou a naopak)

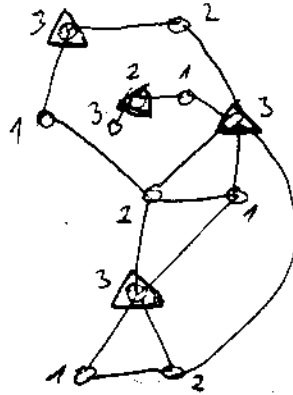
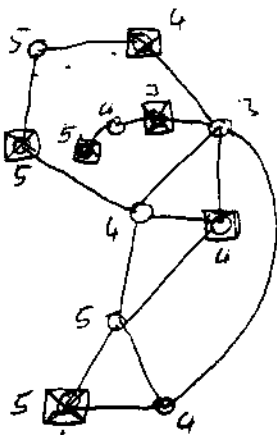
$$\omega \leq \kappa \leq (\max d_i) + 1$$

největší ~~stupeň~~ stupeň uzlu

$$\frac{I}{2} \leq \kappa \leq T$$

G_1 *nezřetězan + excentricky* *dominance + barvy*

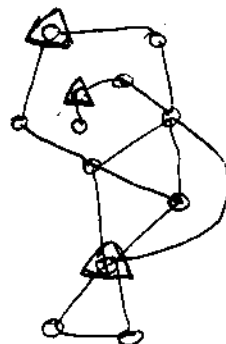
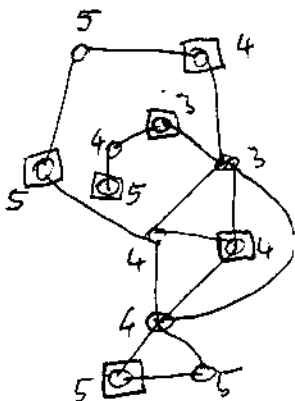
χ 
max 2,
bylo ne horši
než jiné



zobraz jen soucedy s klíči

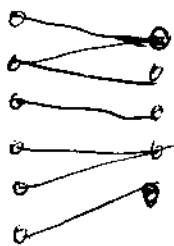
	G_1	G_2	K_n	K_n bez hrany	 m uzlů
α	6	6	1	2	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
Δ	4	3	1	1	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$
ω	3	4	m	$m-1$	2 (3 pro $m=3$)
χ	3	4	m	$m-1$	m sudé : 2 m liché : 3
T	5	5	1	2	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
r	3	3	1	1	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
<i>střed pořadí</i>	2	2	m	$m-2$	m

G_2



bipartitní (bichromatický) graf

$$x = 2$$



přítel systém test

klavně reprezentace grafu

další na webu, ještě rozmysli

8

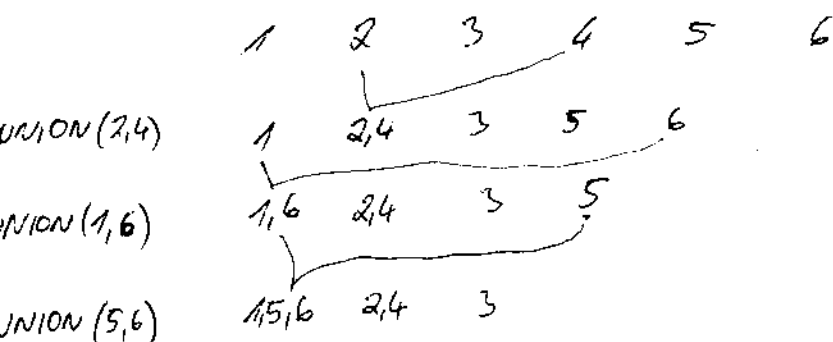
Minimální rozklad

(prvky rozloženy do tříd)

MAKE-SET (x) - vytvoří jednorázovou množinu x , problem x

UNION (x, y) - sloučení dvou množin vícenásobným problem

FIND-SET (x) - vrátí reprezentanta množiny, ve které
leží prvek



pomocí pole

MAKE-SET

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

UNION(2,4)

1	2	3	4	5	6
1	2	3	2	5	6

UNION(1,6)

1	2	3	4	5	6
1	2	3	2	5	1

UNION(5,6)

1	2	3	4	5	6
1	2	3	2	1	1

UNION(4,5)

1	2	3	4	5	6
1	1	3	1	1	1

MAKE-SET (n) $O(1)$

UNION(x,y) $O(m)$ - musí
 se projít
 celé pole
 a přislušné
 nahradit

FIND-SET $O(1)$

vylepšení 1

1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0

index datů

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

repres tech řádků

UNION(2,4)

1	2	3	2	5	6
0	0	0	0	0	0

1	4	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNION(1,6)

1	2	3	2	5	1
0	0	0	0	0	0

6	4	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNION(5,6)

1	2	3	2	1	1
0	0	0	0	0	0

6	4	3	4	5	5
---	---	---	---	---	---

UNION(4,5)

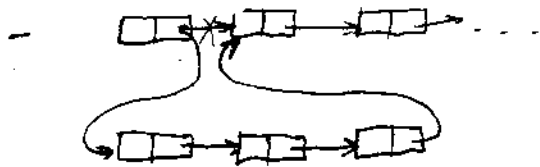
1	1	3	1	1	1
0	0	0	0	0	0

6	4	3	4	2	5
---	---	---	---	---	---

UNION $O(m)$ podle velikosti podmnož

vyřešení 2 (odstranění procházení seznamu)

- pro reprezentanta si pomáháme poslední prvek v seznamu (datci pole)



v nejhorším případě $O(n)$, ale někdy
naštěstí jedné x množin

vyřešení 3

u reprezentanta pomáhám počet prvků množ

1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---

1	2	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---

2	2	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---

3	2	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---

5	2	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---

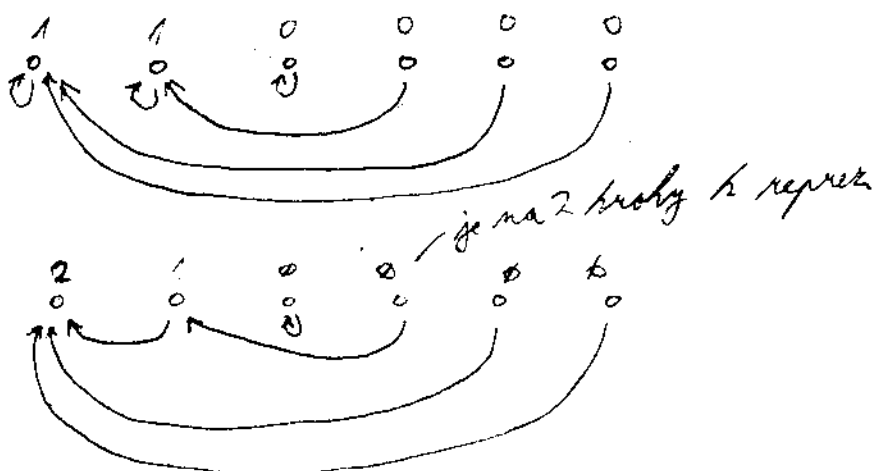
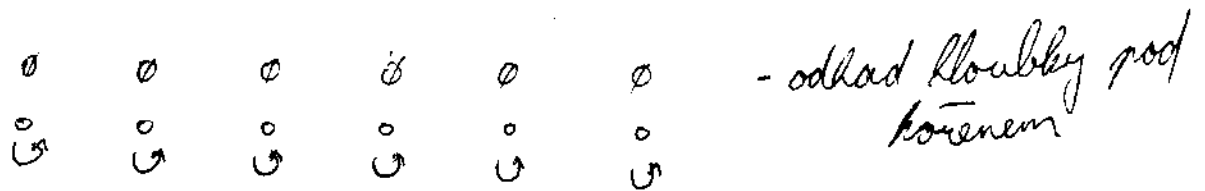
v nejhorším příp $O(n)$

• čím déle UNIONová, tím větší množ. vytvoří
a tím spíš se stane až nebude moci
kumulovaná složitost

UNION lze provést až $(n-1) \times$

$k \times \text{UNION} \dots O(k \cdot \lg n)$ každé politické reprezentanta
 průměrná složitost $\text{UNION} \dots O(\lg n)$ se změní max $\lg n$ krát

další možnost



FIND-SET všechny projít uzly připojí na reprezentanta

$m \times \text{FIND-SET} \dots O(m \cdot \lg^* n)$

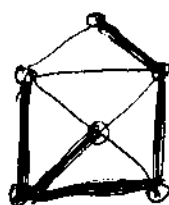
logstar
pro praktická použitelná čísla
max 5

Hledání minimální kostry

kostra - faktor, který je stromem

faktor - podgraf obsahující všechny uzly a nějaké hrany

strom - souvislý acyklický graf



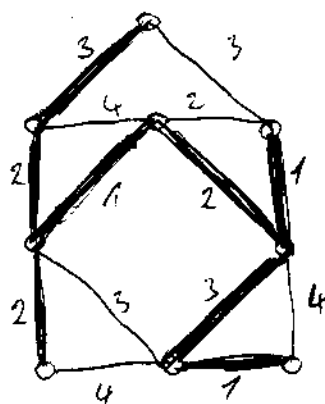
kostra

každý souvislý graf má kostru

kostra má $|V|-1$ hran

každý ohodnocený graf - každé hraně přiřazeno nějaké číslo

Kruskalův algoritmus



bere hrany od nejmenších
a testuje, jestli nevytvorí
cyklus

řazení $O(|H| \cdot \lg |H|)$

$|V| \times \text{MAKESET}$ $O(|V|)$

$2|H| \times \text{FINDSET}$ $O(|H|)$

$(|V|-1) \times \text{UNION}$ $O(|V| \lg |V|)$

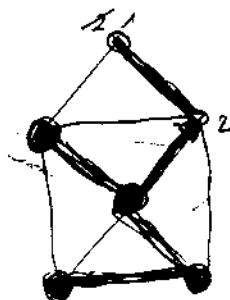
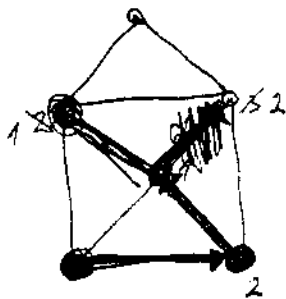
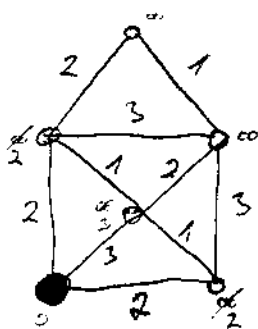
$O(|H| \cdot \lg |H|)$

celková složitost

ka 14 dni test

9

parnikit - Prim's algorithmus



složitost

prioritární fronta - binární halda } Fib. halda

$|U| \times$ výběr-min $O(\lg |U|)$
(a odstranění)

$O(\lg |U|)$

$|H| \times$ přehodnocení $O(\lg |U|)$

$O(1)$

$O(|H| \cdot \lg |U|)$

$O(|U| \cdot \lg |U| + |H|)$

asympt. stejně
rychlé jako Borůvka

Fib. halda

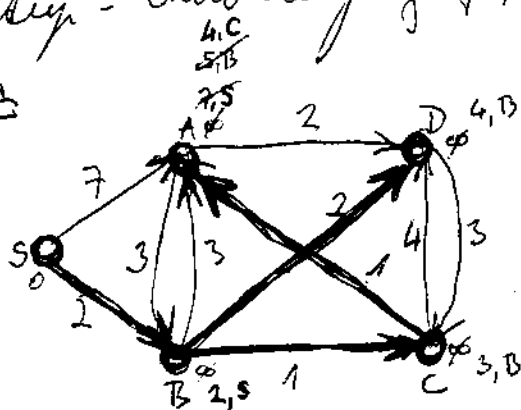
$O(|U| \cdot \lg |U| + |H|)$

Hledání nejkratších cest

nejkratší cesta - má nejmenší součet hodnoty

vstup - hodnotový graf, poč. uzel

Dijkstra



počátek s=0, ostatní ∞
vybrat uzel s nejmenší odhad
relaxovat hrany

nově B - k předchozímu uzelu už není blíž

uraženy všechny uzly - konec

výstupem - pro každý uzel - vzdál od počátku
- předchůdce na nejkratší cestě

venikne strom nejkratších cest

možnost implementace - kdo má předchůdce nil,
má vzdál ∞

složitost

$|V| \times \text{extract-min}$

$|H| \times \text{relaxace}$
(přij. předchozí)

bin. halda

$O(\lg |V|)$

$O(\lg |H|)$

Fib. halda

$O(\lg |V|)$

$O(1)$

pole

$O(|V|)$

$O(1)$

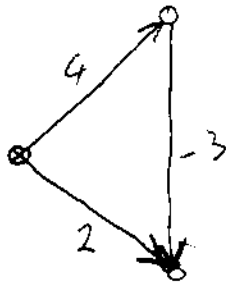
$O(|H| \cdot \lg |V|)$ $O(|V| \cdot \lg |V| + |H|)$ $O(|V|^2)$

pro pole
S A B C D
0 1 3 2 1

nejlepší
pro hustý graf
může být rychlejší

pro málo uzlů nebo hustý graf vyhodně polemi

Dijkstra nezohľadne



B-F alg

Belman-Ford

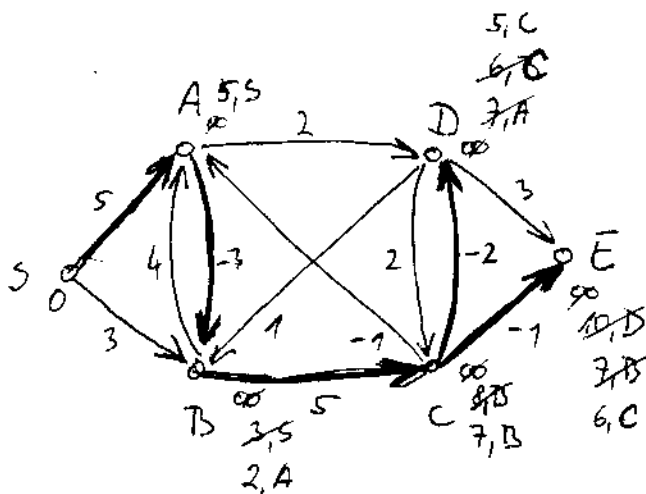


nejkratší cesta je,
ale algoritmy hledají sítě spojité

výskyt záporné smyčky znáčí pořadí
průběh v řešení problému

časová složitost $O(|V| \cdot |E|)$

→



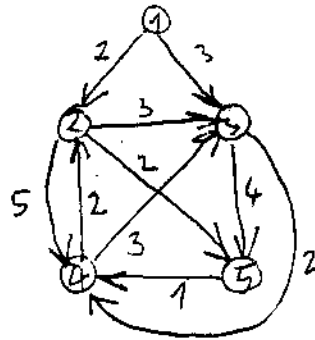
||||

10

Nejkratší cesta ze všech uzlů do všech
Floyd - Marshall (velmi užitečný)

výstup: W - matice délek

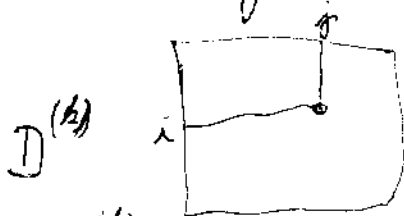
	1	2	3	4	5	...	$ V $
1	0	2	3	∞	∞		
2	∞	0	3	5	2		
3	∞	∞	0	2	4		
4	∞	2	3	0	∞		
5	∞	∞	∞	1	0		



výstup: D - matice vzdáleností

	1	2	3	4	5
1	0	2	3	5	4
2	∞	0	3	3	2
3	∞	4	0	2	4
4	∞	2	3	0	4
5	∞	3	4	1	0

ověřovací kresby



$D_{ij}^{(k)}$

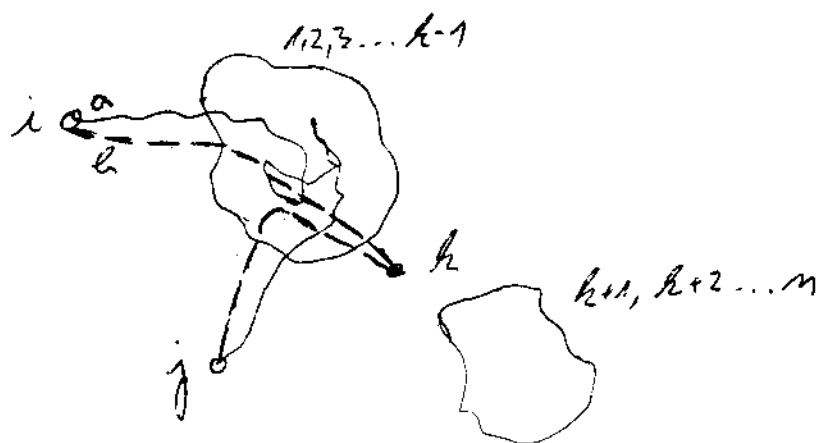
D_{ij} - délka nejkratší cesty z i do j
 při použití pouze uzlů $1, 2, 3, \dots, k$

$$D^{(0)} = W$$

$$D^{(n)} = D$$

$$D^{(k-1)} \rightarrow D^{(k)}$$

$$D_{ij}^{(k)} = \begin{cases} D_{ij}^{(k-1)} \\ D_{ik}^{(k-1)} + D_{kj}^{(k-1)} \end{cases}$$



lze provádět v jedné matici: v k -tém kroku se nemění k -tý sloupec/řádek

int $D[m][m]$;

for ($k=0$; $k < m$; $k++$)

for ($i=0$; $i < m$; $i++$)

for ($j=0$; $j < m$; $j++$)

if ($D[i][j] > (D[i][k] + D[k][j])$) {

$D[i][j] = D[i][k] + D[k][j];$

$P[i][j] = P[k][j];$ }

složitost $O(n^3)$

pro husté grafy i lepší než $n \times$ Dijkstra

- lze také určit silnou souvislost, ~~low~~ eccentricity

Algebraické souvislosti

- lze použít i jiné vhodné operace a řešit jiné úlohy

- určení, kudy nejkratší cesta vedou

P - matice předchůdců

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5

P_{ij} - udává předchůdce j na nejkratší cestě z i do j

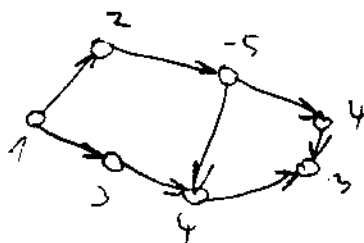
	1	2	3	4	5
4		4			2

cesta $4 \rightarrow 5$

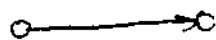
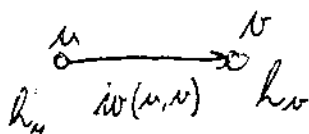
$(4) \rightarrow (2) \rightarrow (5)$

cyklus záporné délky - na diagonále záporná délka cesty

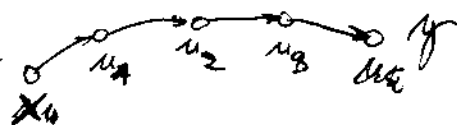
johnsonův algoritmus



ohodnocení uzlů

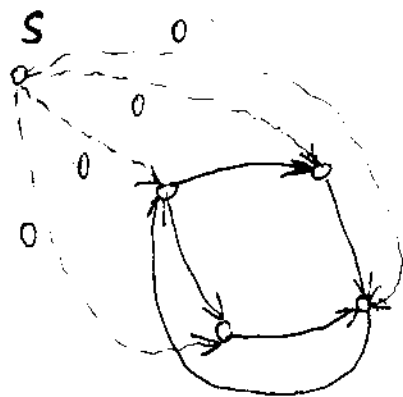


$$w'(u,v) = w(u,v) + h_u - h_v$$



$$d'(x,y) = d(x,y) + h_x - h_y$$

všechny cesty z x do y se zvětší o $h_x - h_y$
nejkratší je opět nejkratší



s pridany uzel
 * nej Bellman Ford

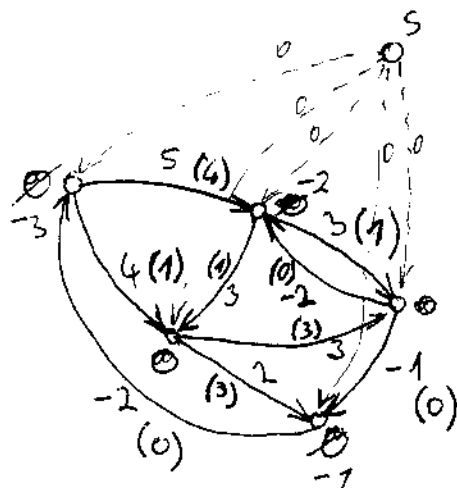
cyklus rap. delky
 → konec, chyba

$$w'(u, v) \geq 0$$

$$w(u, v) + h_u - h_v = 0$$

$$h_u + w(u, v) \geq h_v$$

pak $n \times$ Dijkstra



s se nemusí přidat,
 stačí dát všem
 uzlům vzdál 0

$$O(|V| \cdot |H| + |V|^2 \lg |V|)$$

Automaty

abeceda - konečná množ. znaků, z kterých se vytvářejí řetězce

jazyk většinou nekonečný

dněšní abeceda $\{a, b, c\}$

$(a|b|c)^*aa(a|b|c)^*$ regulární výraz

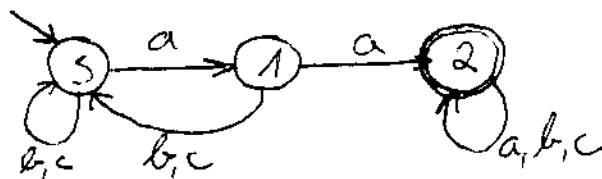
automat - abeceda, množ. vnitřních stavů,

množ. koncových stavů,

1 počáteční stav

přechodová fce (stav, znak) $\rightarrow$ stav

obrázek



tabulka

		a	b	c
$\rightarrow$	S	1	S	S
	1	2	S	S
$\leftarrow$	2	2	2	2

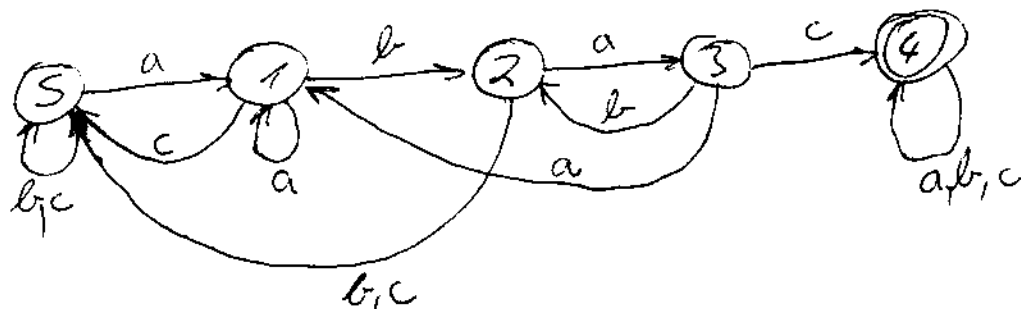
konfigurace - stav činnosti automatu

$(S, abaac) \vdash (1, baac) \vdash (5, aac) \vdash (1, ac)$
 $\vdash (2, c) \vdash (2, \epsilon)$

řádný řetězec

implementace - 2D pole - ta tabulka přechodů,
x mi přímo říká další stav
lineární složitost

vyhledat ~~abac~~

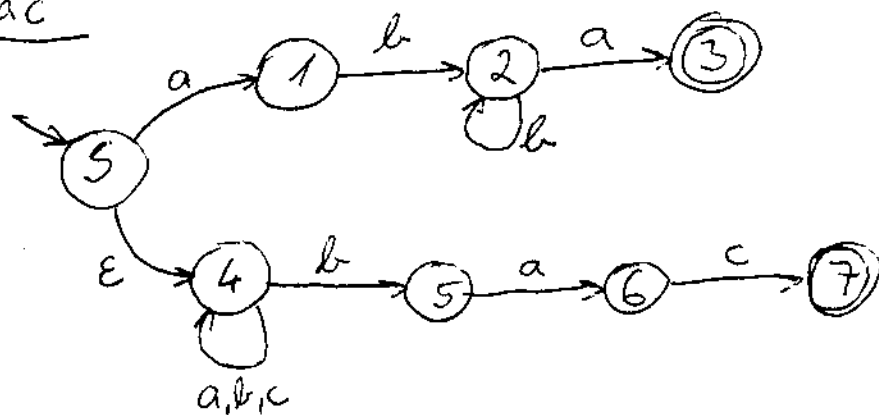


Nedeterministický konečný automat

(stav, znak nebo ϵ) $\rightarrow$ možná stavi

ab^+a
 $(a|b|c)^+bac$

abbac



má stejnou vyjadřovací schopnost jako deterministický

	a	b	c	ε
→ 5	1	—	—	4
1	—	2	—	—
2	3	2	—	—
→ 3	—	—	—	—
4	4	4,5	4	4
5	6	—	—	—
6	—	—	7	—
← 7	—	—	—	—

	a	b	c
→ 5,4	1,4	4,5	4
1,4	4	2,4,5	4
4,5	4,6	4,5	4
2,4,5	3,4,6	2,4,5	4
4,6	4	4,5	4,7
← 3,4,6	4	4,5	4,7
← 4,7	4	4,5	4
4	4	4,5	4

kdyby mělo nějak přejít,
 přidá se fail stav